
THEORETISCHE UND ALGORITHMISCHE METHODEN ZUR
BERECHNUNG VON VERTIZES IRREDUZIBLER MODULN
SYMMETRISCHER GRUPPEN

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

eingereicht von Dipl.-Math. Susanne Danz
geboren am 17.04.1982 in Schmalkalden

Gutachter

1.

2.

Tag der letzten Prüfung des Rigorosums:

Tag der öffentlichen Verteidigung:

Inhaltsverzeichnis

Symbole	3
Einleitung	6
I Grundlagen	10
1 Algebren	11
1.1 Moduln über Algebren	11
1.2 Darstellungen von Algebren	15
2 Gruppenalgebren	16
2.1 Gruppenalgebren und Moduln	16
2.2 Relative Projektivität, Vertizes und Quellen	18
2.3 Die Greenkorrespondenz	20
2.4 Einschränkungen unzerlegbarer FG -Moduln auf Normalteiler	21
2.5 Vertizes irreduzibler FG -Moduln	24
2.6 Rangvarietäten	25
3 Die symmetrischen Gruppen	27
3.1 Die Sylowgruppen der symmetrischen Gruppen	27
3.2 Kombinatorische Hilfsmittel	29
3.3 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen	35
3.4 Die Blöcke von $F\mathfrak{S}_n$ und ihre Defektgruppen	38
3.5 Relative Projektivität irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln	39
II Vertizes von $F\mathfrak{S}_n$-Moduln	40
4 Irreduzible Moduln symmetrischer Gruppen	41
4.1 Restriktion und Induktion irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln	41
4.2 Die Scopes-Äquivalenz und Blöcke von bestimmtem Gewicht	44
4.3 Die Feit-Vermutung für symmetrische Gruppen	48
4.4 Vollständig zerfallende Moduln	52
5 Verallgemeinerte Young-Moduln	55
5.1 Definitionen	55
5.2 Young-Vertizes und Young-Quellen	56
5.3 Vertizes und Quellen verallgemeinerter Young-Moduln	57
5.4 Irreduzible Spechtmoduln	58

6	Irreduzible Moduln zu Hakenpartitionen	60
6.1	Notationen und Vorbemerkungen	60
6.2	Vertizes der Moduln D_r	63
6.3	Regularisierungen	66
7	Moduln kleiner Dimensionen	70
7.1	Irreduzible Moduln in Charakteristik 3	71
7.2	Irreduzible Moduln in Charakteristik 2	73
7.3	Irreduzible Moduln in Charakteristik $p > 3$	80
III	Computerberechnungen	81
8	Methoden zur Vertexberechnung	82
8.1	Abspalten unzerlegbarer direkter Summanden mit zyklischen Vertizes	82
8.2	Kondensation	84
8.3	Benson-Test	86
9	Vertexberechnungen	88
9.1	Vertizes irreduzibler Moduln in Charakteristik 2	88
9.2	Vertizes irreduzibler Moduln in Charakteristik 3	95
10	Fragen und Vermutungen	106
A	Dimensionen	109
B	Quellcodes der Programme	111
B.1	Koeffizientenkörper	112
B.2	Spechtmoduln	112
B.3	Abspalten projektiver Summanden	112
B.4	Abspalten unzerlegbarer direkter Summanden mit zyklischen Vertizes	113
B.5	Äußere Potenzen eines FG -Moduls	115
B.6	Spinmoduln in Charakteristik 2	116
Literatur		121
Stichwortverzeichnis		124

Symbole

allgemeine Bezeichnungen

\mathbb{N}	die Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}^*	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$
\mathbb{P}	die Menge der Primzahlen
\mathbb{Z}	der Ring der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	der Körper der rationalen Zahlen
\mathbb{F}_q	der endliche Körper mit q Elementen
\overline{F}	algebraischer Abschluß eines Körpers F
$\text{char}(F)$	die Charakteristik des Körpers F
$\text{Mat}(n, F)$	die F -Algebra der $(n \times n)$ -Matrizen über dem Körper F
$ n _p$	für $p \in \mathbb{P}$ die höchste p -Potenz, welche $n \in \mathbb{N}^*$ teilt

Gruppen

\mathfrak{S}_n	die symmetrische Gruppe des Grades n
\mathfrak{A}_n	die alternierende Gruppe des Grades n
$H \leq G$	Untergruppe
$H < G$	echte Untergruppe
$H \trianglelefteq G$	Normalteiler
$H \triangleleft G$	echter Normalteiler
$H \leq_G K$	Untergruppen H und K von G mit $gHg^{-1} \leq K$ für ein $g \in G$
$H \sim_G K$	Untergruppen H und K von G mit $gHg^{-1} = K$ für ein $g \in G$
$g_1 \sim_G g_2$	Elemente $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 = hg_2h^{-1}$ für ein $h \in G$
$ G $	Ordnung der Gruppe G
$ G : H $	Index von $H \leq G$ in G
G/H	die Menge der Linksnebenklassen von G nach H
$H \backslash G$	die Menge der Rechtsnebenklassen von G nach H
$K \backslash G / H$	die Menge der Doppelnebenklassen von G nach H und K
$Z(G)$	Zentrum der Gruppe G
$\text{Cl}(G)$	die Menge der Konjugationsklassen der Gruppe G
$\text{Syl}_p(G)$	für $p \in \mathbb{P}$ die Menge der p -Sylowgruppen der Gruppe G
$C_G(H)$	Zentralisator von $H \leq G$ in G
$C_G(g)$	Zentralisator von $g \in G$ in G
$N_G(H)$	Normalisator von $H \leq G$ in G
$\langle g_1, \dots, g_m \rangle$	die von den Elementen $g_1, \dots, g_m \in G$ erzeugte Untergruppe von G
$G \wr H$	Kranzprodukt von G mit H
$\exp_p(G)$	für $p \in \mathbb{P}$ der p -Exponent von G

Algebren und Moduln

$\mathbf{J}(A)$	das Jacobson-Radikal einer F -Algebra A
$\mathbf{S}(A)$	der Sockel einer F -Algebra A
$\mathcal{U}(A)$	die Einheitengruppe einer F -Algebra A
$\mathbf{Z}(A)$	das Zentrum einer F -Algebra A
$A\text{-mod}$	die Kategorie der endlich erzeugten A -Linksmoduln
$\text{Hom}_A(M, N)$	der F -Vektorraum der A -Homomorphismen des A -Moduls M in den A -Modul N
$\text{End}_A(M)$	die F -Algebra der A -Endomorphismen des A -Moduls M
$\text{Rad}(M)$	das Jacobson-Radikal des A -Moduls M
$\text{Soc}(M)$	der Sockel des A -Moduls M
$\text{Hd}(M)$	der Kopf des A -Moduls M
$[M : D]$	Anzahl der zum irreduziblen A -Modul D isomorphen Kompositionsfaktoren des A -Moduls M
$M N$	der A -Modul M ist isomorph zu einem direkten Summanden des A -Moduls N
$\text{Res}_B^A(M)$	Einschränkung des A -Moduls M auf die Unter algebra B von A
$\text{Ind}_B^A(N)$	Induktion des B -Moduls N nach A für eine Unter algebra B von A
FG	die Gruppenalgebra der Gruppe G über dem Körper F
$\text{Res}_H^G(M)$	$\text{Res}_{FH}^{FG}(M)$ für $H \leq G$
$\text{Ind}_H^G(N)$	$\text{Ind}_{FH}^{FG}(N)$ für $H \leq G$
F_G	der triviale FG -Modul F
M^*	der zum FG -Modul M duale FG -Modul $\text{Hom}_F(M, F)$
gN	für $g \in G$, $H \leq G$ und einen FH -Modul N der zu N konjugierte $F[gHg^{-1}]$ -Modul $g \otimes_{FH} N$
$V_E^r(M)$	Rangvarietät eines FG -Moduls M bezüglich einer elementarabelschen Untergruppe E von G
$c_G(M)$	Komplexität eines FG -Moduls M

Kombinatorik symmetrischer Gruppen

\mathcal{C}_n	die Menge der Kompositionen von $n \in \mathbb{N}$
\mathcal{P}_n	die Menge der Partitionen von $n \in \mathbb{N}$
$\lambda \vdash n$	λ ist Partition von n
$\mathcal{P}_{n,q}$	die Menge der q -regulären Partitionen von $n \in \mathbb{N}$
\mathcal{P}	die Menge aller Partitionen natürlicher Zahlen
$\mathcal{C}(k, n)$	die Menge der Kompositionen von n , bei denen genau die ersten k Teile von 0 verschieden sind
$\mathcal{P}(k, n)$	die Menge der Partitionen von n , bei denen genau die ersten k Teile von 0 verschieden sind
$\mathcal{P}(k l, n)$	die Menge der Elemente aus \mathcal{C}_n der Form $(\lambda p\mu)$ mit $\lambda \in \mathcal{P}(k, s)$ und $\mu \in \mathcal{P}(l, t)$ für $s, t \in \mathbb{N}$ mit $n = s + pt$
$\lambda \supseteq \mu$	$\lambda, \mu \in \mathcal{C}_n$, und λ dominiert μ
$\lambda \supset \mu$	$\lambda, \mu \in \mathcal{C}_n$ mit $\lambda \supseteq \mu$ und $\lambda \neq \mu$
$\lambda \geq \mu$	$\lambda, \mu \in \mathcal{C}_n$, und λ ist lexikographisch größer als μ oder $\lambda = \mu$
$\lambda > \mu$	$\lambda, \mu \in \mathcal{C}_n$ mit $\lambda \geq \mu$ und $\lambda \neq \mu$
λ'	die zu $\lambda \in \mathcal{P}$ konjugierte Partition
$\mathbf{m}(\lambda)$	für $p \in \mathbb{P}$ die zu $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$ Mullineux-konjugierte Partition von n
$[\lambda]$	das Young-Diagramm von $\lambda \in \mathcal{P}$
$[\lambda]_q$	das q -Restediagramm von $\lambda \in \mathcal{P}$ für $q \in \mathbb{N}^*$
\mathfrak{S}_λ	für $\lambda \in \mathcal{P}_n$ die Young-Untergruppe von \mathfrak{S}_n zur Partition λ

Moduln der symmetrischen Gruppen

M^λ	der $F\mathfrak{S}_n$ -Permutationsmodul zur Partition λ von n
S^λ	der $F\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul zur Partition λ von n
Y^λ	der $F\mathfrak{S}_n$ -Young-Modul zur Partition λ von n
D^λ	für $\text{char}(F) = p > 0$ der irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul zur Partition $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$
$M(\lambda \mu)$	der verallgemeinerte $F\mathfrak{S}_n$ -Permutationsmodul zum Partitionspar (λ, μ)
$Y(\lambda p\mu)$	der verallgemeinerte $F\mathfrak{S}_n$ -Young-Modul mit $(\lambda p\mu) \in \mathcal{P}(k l, n)$

Einleitung

Ein aus der Ringtheorie stammender Begriff ist der eines projektiven Moduls. Dabei heißt ein endlich erzeugter Modul M über einem Ring R **projektiv**, wenn er zu einem direkten Summanden eines freien R -Moduls, d.h. eines Moduls der Form $nR := R \oplus \cdots \oplus R$ für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph ist. Für den Fall, dass F ein Körper, G eine endliche Gruppe und

$$R := FG := \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \alpha_g \in F \text{ für alle } g \in G \right\}$$

die Gruppenalgebra von G über F sind, lässt sich dieser Projektivitätsbegriff verallgemeinern. Sofern wir nicht ausdrücklich etwas anderes voraussetzen, werden wir ab jetzt unter einem FG -Modul stets einen FG -Linksmodul verstehen, welcher als F -Vektorraum endlichdimensional ist. In diesem Zusammenhang ist insbesondere der Körper F selber ein FG -Modul mit $g\alpha = \alpha$ für alle $g \in G$ und $\alpha \in F$ und wird als der **triviale** FG -Modul bezeichnet.

Sind nun H eine Untergruppe von G , M ein FG -Modul und N ein FH -Modul, so kann man einerseits M auch als FH -Modul auffassen. Wir bezeichnen diese **Einschränkung** von M auf H mit $\text{Res}_H^G(M)$. Andererseits wird auch der F -Vektorraum $\text{Ind}_H^G(N) := FG \otimes_{FH} N$ zu einem FG -Modul, welchen wir als **induzierten** Modul bezeichnen. Mit diesen Notationen nennen wir den FG -Modul M **relativ H -projektiv**, falls M zu einem direkten Summanden von $\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(M))$ isomorph ist. Im Fall $H = \{1\}$ sind die relativ H -projektiven FG -Moduln genau die projektiven FG -Moduln.

Falls der FG -Modul M zusätzlich unzerlegbar ist, so ist ein **Vertex** von M eine bezüglich Inklusion minimale Untergruppe P von G mit der Eigenschaft, dass M relativ P -projektiv ist. Des Weiteren existiert dann stets ein unzerlegbarer direkter Summand L von $\text{Res}_P^G(M)$ mit Vertex P , welcher als eine **Quelle** von M bezeichnet wird. Ist L' eine weitere Quelle von M , so existiert ein $g \in N_G(P)$ mit $L' \cong g \otimes_{FP} L \subseteq \text{Ind}_P^G(L)$.

Gilt $\text{char}(F) = 0$, so ist die Gruppenalgebra FG halbeinfach, und jeder FG -Modul ist projektiv. Im Zusammenhang mit der Bestimmung von Vertizes unzerlegbarer FG -Moduln ist dieser Fall daher uninteressant, und wir setzen ab jetzt $\text{char}(F) = p > 0$ voraus.

Dann bilden die Vertizes eines unzerlegbaren FG -Moduls stets eine Konjugationsklasse von p -Untergruppen von G . Außerdem stehen die Vertizes in engem Zusammenhang mit den Blöcken von FG und deren Defektgruppen.

Die **Blöcke** von FG sind dabei die bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmten unzerlegbaren Ideale B_1, \dots, B_r von FG mit $FG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$. Ist M ein unzerlegbarer FG -Modul, so existiert dann genau ein $i \in \{1, \dots, r\}$, so dass $M = FG \cdot M = B_i \cdot M$ und $0 = B_j \cdot M$ für alle $j \neq i$ gilt. Wir sagen, B_i enthält den Modul M , oder M liegt im Block B_i . Der Block von FG , welcher den trivialen FG -Modul enthält, wird als der **Hauptblock** von FG bezeichnet. Die **Defektgruppen** eines Blocks B_i von FG sind dann die bezüglich Inklusion maximalen Vertizes unzerlegbarer FG -Moduln, die im Block B_i liegen. Ferner existieren zu einem unzerlegbaren FG -Modul M , welcher im Block B_i liegt und Vertex P hat, stets eine Defektgruppe Δ von B_i und eine p -Sylowgruppe S von G , so dass $P \leq \Delta \leq S$ und $|S : P| \mid \dim(M)$ gilt. Auf diese Weise erhält man sowohl eine untere als auch eine obere Schranke für die Ordnung der Vertizes von M .

Für den Fall, dass M sogar irreduzibel ist, besagt ein Satz von R. Knörr aus [48], dass man außerdem $C_\Delta(P) \leq P \leq \Delta$ annehmen kann. Hierbei bezeichnen wir mit $C_\Delta(P)$ den Zentralisator

von P in Δ . Dies hat also insbesondere zur Folge, dass irreduzible FG -Moduln, die in Blöcken mit abelschen Defektgruppen liegen, genau diese Defektgruppen als Vertizes haben.

Wir werden uns in dieser Arbeit auf den Fall $G = \mathfrak{S}_n$ für $n \in \mathbb{N}^*$ konzentrieren, wobei wir mit \mathfrak{S}_n die symmetrische Gruppe des Grades n bezeichnen. Es ist bekannt, dass in der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen kombinatorische Methoden eine zentrale Rolle spielen. So sind zum Beispiel die irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln durch die *p -regulären Partitionen* von n parametrisiert. Unter einer p -regulären Partition von n versteht man eine Folge $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ natürlicher Zahlen, so dass $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m > 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = n$ und $|\{j \in \{1, \dots, m\} \mid \lambda_i = \lambda_j\}| < p$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Den bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Modul zur p -regulären Partition λ bezeichnen wir dann mit D^λ .

Ferner besitzen sowohl die Blöcke von $F\mathfrak{S}_n$ als auch deren Defektgruppen rein kombinatorische Charakterisierungen. So lassen sich einem Block B von $F\mathfrak{S}_n$ stets eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl w , das *(p) -Gewicht* von B , und eine eindeutig bestimmte p -reguläre Partition $\tilde{\lambda}_B$ von $n - pw$, der *(p) -Kern* von B , zuordnen. Die Defektgruppen von B sind dann in \mathfrak{S}_n zu den p -Sylogruppen von \mathfrak{S}_{pw} konjugiert.

Eine naheliegende Frage ist daher die, ob sich auch die Vertizes irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln auf kombinatorische Weise beschreiben lassen. In [70] befasste sich bereits R. Zimmermann mit dieser Frage und fand unter anderem zahlreiche Beispiele, die zeigen, dass im Gegensatz zu den Blöcken und Defektgruppen, die Vertizes eines irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduls keineswegs nur vom Gewicht der zugehörigen p -regulären Partition abhängen. Des Weiteren stellte R. Zimmermann im Rahmen seiner Dissertation die Vermutung auf, dass die Vertizes irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln stets in \mathfrak{S}_n zu den p -Sylogruppen eines direkten Produkts

$$\mathfrak{S}_{n_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{n_k} \times \mathfrak{A}_{n_{k+1}} \times \dots \times \mathfrak{A}_{n_l}$$

mit gewissen $k, l, n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^l n_i = n$ konjugiert sind. Hierbei bezeichne \mathfrak{A}_m für jedes $m \in \mathbb{N}^*$ die alternierende Gruppe des Grades m . Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht richtig. Betrachtet man zum Beispiel den Fall $p = 2$ und den irreduziblen $F\mathfrak{S}_{14}$ -Modul $D^{(5,4,3,2)}$ zur Partition $(5, 4, 3, 2)$, so liegt dieser in einem Block vom Gewicht 4, hat Dimension 35840, und Computerberechnungen zeigen, dass dessen Vertizes zu einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 8, welche regulär auf $\{1, \dots, 8\}$ operiert, konjugiert sind.

Im Verlauf dieser Arbeit werden wir weitere der in [70] offen gebliebenen Fragen und Vermutungen erneut aufgreifen.

Inhaltlich besteht die vorliegende Arbeit aus drei Teilen. Im ersten werden wir die für uns wichtigen Grundlagen der modularen Darstellungstheorie endlichdimensionaler Algebren über Körpern zusammenfassen und insbesondere auf den Fall der Gruppenalgebren eingehen. Anschließend werden wir uns speziell den symmetrischen Gruppen, deren Moduln und kombinatorischen Charakterisierungen widmen. Außerdem werden wir auch auf die für die Vertexberechnungen wichtigen Eigenschaften der p -Sylogruppen der symmetrischen Gruppen sowie der Blöcke von $F\mathfrak{S}_n$ und der entsprechenden Defektgruppen eingehen. Dabei werden wir unter anderem zeigen, dass ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, welcher in einem Block vom Gewicht w liegt, nicht relativ \mathfrak{S}_{pw-1} -projektiv sein kann.

Im zweiten Teil befassen wir uns hauptsächlich mit der theoretischen Bestimmung von Vertizes irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln. Eines der wichtigsten Werkzeuge hierbei bilden die modularen Branching-Regeln von A. Kleshchev. Diese treffen für einen irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Modul D Aussagen darüber, ob und, wenn ja, welche irreduziblen $F\mathfrak{S}_{n-1}$ -Moduln (beziehungsweise $F\mathfrak{S}_{n+1}$ -Moduln) zu direkten Summanden von $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D)$ (beziehungsweise $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D)$) isomorph sind. Auf diese Weise lassen sich aus den Eigenschaften von Vertizes irreduzibler $F\mathfrak{S}_{n-1}$ -Moduln Rückschlüsse auf die Eigenschaften von Vertizes irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln ziehen und umgekehrt. Auch diese Methoden sind rein kombinatorischer Natur.

Von entscheidender Bedeutung sind auch die Ergebnisse von J. Scopes aus [65]. Diese besagen, dass es bis auf Morita-Äquivalenz nur endlich viele Blöcke symmetrischer Gruppen von einem festen p -Gewicht $w > 0$ gibt. Zwei solche Morita-äquivalente Blöcke B und \overline{B} nennen wir auch **Scopes-äquivalent**. Weiter induziert die Scopes-Äquivalenz eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen irreduzibler Moduln in B und denen in \overline{B} . Wir werden in Kapitel 4 sehen, dass dabei die einander entsprechenden irreduziblen Moduln stets einen gemeinsamen Vertex besitzen.

Die Anwendung der Scopes-Äquivalenz auf die Resultate unserer Computerberechnungen ermöglicht es auch, im Fall $p = 2$ die Vertizes aller irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen, welche in 2-Blöcken vom Gewicht $w \leq 4$ liegen, zu bestimmen. Dabei wurde der Fall $w < 4$ bereits in [70] behandelt. Ferner kann man mit Hilfe der Sätze von Scopes und Knörr zeigen, dass die Feit-Vermutung für symmetrische Gruppen gilt. Diese besagt Folgendes: Ist F algebraisch abgeschlossen, und ist P eine p -Gruppe, so existieren nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer FP -Moduln, welche als Quellen irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln für alle $n \in \mathbb{N}^*$ mit $\mathfrak{S}_n \supseteq P$ vorkommen.

In diesem Zusammenhang werden wir ferner analysieren, welche Gruppen der Ordnung $\leq p^3$ überhaupt als Vertizes irreduzibler Moduln symmetrischer Gruppen in Frage kommen, und einen Fehler aus [63] korrigieren. Dort behauptet L. Puig, dass für einen irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ Modul mit Vertex Q und Defektgruppe P stets $|P| \leq |Z(Q)|!$ gilt. Dies ist jedoch nicht richtig. Ist zum Beispiel $P = Q$ eine p -Sylowgruppe von \mathfrak{S}_{p^2} , so ist P eine Defektgruppe des Hauptblocks von $F\mathfrak{S}_{p^2}$, welcher den trivialen $F\mathfrak{S}_{p^2}$ -Modul enthält. Dieser wiederum hat Vertex P , aber es gilt $p^{p+1} = |P| \not\leq |Z(P)|! = p!$. Dennoch lässt sich $|P|$ stets in Abhängigkeit von $|Q|$ nach oben beschränken. Ist nämlich $|Q| = p^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$, so werden wir in Abschnitt 4.3 zeigen, dass dann $|P| \leq (lp^l)!$ gilt.

Des Weiteren werden wir im zweiten Teil der Arbeit auch die Vertizes einiger spezieller Klassen irreduzibler beziehungsweise unzerlegbarer Moduln symmetrischer Gruppen bestimmen. Dazu gehören die sogenannten **vollständig zerfallenden Moduln** und die unzerlegbaren **verallgemeinerten Young-Moduln**. Bei letzteren handelt es sich um unzerlegbare $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln in ungerader Charakteristik, welche man als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Young-Moduln aus [26] ansehen kann.

Ebenfalls eine Verallgemeinerung bereits in [70] untersuchter irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln stellen die äußeren Potenzen des irreduziblen Moduls $D := D^{(n-1,1)}$ zur Partition $(n-1,1)$ dar, mit denen wir uns in Kapitel 6 befassen. Dabei ist D der einzige nichttriviale Kompositionsfaktor des natürlichen $F\mathfrak{S}_n$ -Permutationsmoduls $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(F)$. Ist nun p ungerade, dann weiß man, dass $\dim(D) = n-1$ im Fall $p \nmid n$ und $\dim(D) = n-2$ im Fall $p|n$ gilt. Ferner ist $D_r := \bigwedge^r D$ für alle $0 \leq r \leq \dim(D)$ stets wieder ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul. Im Fall $p \nmid n$ sind die Vertizes von D_r nach [69] bekannt. Sie sind in \mathfrak{S}_n zu den p -Sylowgruppen von $\mathfrak{S}_{n-r-1} \times \mathfrak{S}_r$ konjugiert. Wir beschäftigen uns daher mit dem Fall $n = xp$ für $x \geq 1$. Dann liegt D_r für $0 \leq r \leq n-2$ stets im Hauptblock von $F\mathfrak{S}_n$. Ist $r \leq p-1$, so gilt insbesondere $D_r \cong D^{(n-r,1^r)}$, und für $r \leq p-2$ sind die Vertizes von D_r nach [70] genau die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n . Der Fall $r = p-1$, $x \geq p$ konnte dort nicht behandelt werden. Mit Hilfe eines Satzes aus [5] werden wir zeigen, dass Folgendes gilt:

Satz. *Es seien $x > 2$, $k \in \{1, \dots, x-1\}$ und $r = kp-1$. Falls die Dimension von D_r durch p , aber nicht durch p^2 teilbar ist, so sind die Vertizes von D_r genau die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n .*

Dieser Satz schließt insbesondere den Fall $x \not\equiv 1 \pmod{p}$, $k = 1$ ein. Folglich hat dann auch $D_{p-1} \cong D^{(n-p+1,1^{p-1})}$ die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n als Vertizes.

In Kapitel 7 werden wir die Vertizes aller irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen der Dimensionen ≤ 1000 bestimmen. Hierzu werden wir die in [38] verwendeten Methoden verallgemeinern, um für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ und jede Primzahl p die p -regulären Partitionen λ von n mit der Eigenschaft $\dim(D^\lambda) \leq 1000$ zu bestimmen. Die Vertizes der entsprechenden Moduln werden wir

anschließend sowohl theoretisch als auch mit Hilfe des Computers berechnen.

Im dritten Teil dieser Arbeit widmen wir uns der Vertexberechnung mittels des Computers. Die Grundlage bildet dabei ein von R. Zimmermann entwickelter und unter MAGMA implementierter Algorithmus zur Berechnung von Vertizes unzerlegbarer FG -Moduln, wobei G eine beliebige endliche Gruppe sein kann. Jedoch lässt sich dieser Algorithmus für „große“ Moduln - etwa solche der Dimension ≥ 1000 - aus Speicherplatzgründen meist nicht mehr direkt anwenden. Die Hauptprobleme stellen dabei das Einschränken von FG -Moduln auf Untergruppen von G und das anschließende Zerlegen dieser Einschränkungen in unzerlegbare direkte Summanden dar. Wir werden daher Methoden erläutern, welche sich effizient implementieren lassen und es ermöglichen, diese Probleme teilweise zu umgehen. Dazu gehören die sogenannte Fixpunktkondensation, das Abspalten unzerlegbarer direkter Summanden mit zyklischen Vertizes sowie ein Verfahren, das im Zusammenhang mit der Kohomologie elementarabelscher p -Gruppen steht. Letzteres dient dazu, festzustellen, ob eine bestimmte elementarabelsche p -Gruppe E von G im Vertex eines unzerlegbaren FG -Moduls M enthalten sein muss. Mit Hilfe dieser Methoden ist es uns möglich, auch irreduzible Moduln großer Dimensionen mit dem Computer zu behandeln und bis auf zwei Ausnahmen die Vertizes aller irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ in den Fällen $p = 2$, $n \leq 14$ und $p = 3$, $n \leq 15$ zu berechnen.

Die Resultate aller Computerberechnungen werden abschließend in Kapitel 9 zusammengefasst.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Dabei gilt mein Dank allen voran meinem Betreuer Prof. Dr. Burkhard Külshammer für seine Geduld und seine Unterstützung durch zahlreiche wertvolle Diskussionen und Anregungen. Ein ganz herzlicher Dank gilt außerdem PD. Dr. Jürgen Müller aus Aachen, der mich mit den Methoden der Computeralgebra vertraut gemacht hat.

Des Weiteren danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung während meiner Promotionszeit.

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Algebren

Wir werden zu Beginn die für diese Arbeit wesentlichen darstellungstheoretischen Aussagen zusammenfassen. Dabei setzen wir die grundlegenden Begriffe der Ring- und Gruppentheorie als bekannt voraus. Detaillierte Beschreibungen und Beweise zu allen zitierten Sätzen findet man unter anderem in [1], [13], [23] und [59]. In diesem Kapitel sei F stets ein Körper.

1.1 Moduln über Algebren

Im Folgenden sei jede F -Algebra A assoziativ, endlichdimensional und besitze ein Einselement 1_A . Ferner setzen wir $\mathbf{Z}(A) := \{a \in A \mid ab = ba \text{ für alle } b \in A\}$. Dies ist eine F -Unteralgebra von A und heißt das **Zentrum** von A .

Des Weiteren seien für jede F -Algebra A alle A -Linksmoduln und auch alle A -Rechtsmoduln endlichdimensionale F -Vektorräume. Sofern wir nicht explizit etwas anderes voraussetzen, werden wir stets mit Linksmoduln arbeiten und daher auch einfach von Moduln sprechen. Alle Aussagen übertragen sich jedoch ganz analog auf Rechtsmoduln.

Wir fixieren jetzt für diesen Abschnitt eine F -Algebra A und einen A -Modul M .

Bemerkung/Definition 1.1.1. Für einen weiteren A -Modul N nennen wir eine Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ mit $\varphi(am_1 + bm_2) = a\varphi(m_1) + b\varphi(m_2)$ für alle $a, b \in A$, $m_1, m_2 \in M$ einen **A -Homomorphismus** von M nach N . Entsprechend definiert man **A -Monomorphismen**, **A -Epimorphismen**, **A -Isomorphismen**, **A -Endomorphismen** und **A -Automorphismen**. Die Menge aller A -Homomorphismen von M nach N wird mit $\text{Hom}_A(M, N)$ bezeichnet und bildet einen F -Vektorraum. Die Menge aller A -Endomorphismen von M wird mit $\text{End}_A(M)$ bezeichnet und bildet eine F -Algebra, die **Endomorphismenalgebra** von M .

Ferner wird M dann auch zu einem E -Modul mit $fm := f(m)$ für alle $f \in \text{End}_A(M)$ und alle $m \in M$.

Sind M_1, \dots, M_n Untermoduln von M , so bildet die Menge $\{\sum_{i=1}^n m_i \mid m_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ einen Untermodul von M , welchen wir die **Summe** von M_1, \dots, M_n nennen und mit $\sum_{i=1}^n M_i$ bezeichnen. Falls sich zusätzlich jedes Element $m \in \sum_{i=1}^n M_i$ als Summe $m = \sum_{i=1}^n m_i$ mit eindeutig bestimmten $m_i \in M_i$ für $i = 1, \dots, n$ schreiben lässt, so sagen wir, die Summe $\sum_{i=1}^n M_i$ ist **direkt** und schreiben $\bigoplus_{i=1}^n M_i$.

Im Fall $M \neq 0$ heißt M **zerlegbar**, falls es echte Untermoduln $M_1 \neq 0 \neq M_2$ von M mit $M = M_1 \oplus M_2$ gibt. Gegebenenfalls heißen M_1 und M_2 **direkte Summanden** von M . Andernfalls nennt man M **unzerlegbar**. Ist ein A -Modul N zu einem direkten Summanden von M isomorph, so verwenden wir die Schreibweise $N \mid M$. Ist N zu M selber isomorph, schreiben wir $M \cong N$.

Ist $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ eine Zerlegung des A -Moduls M in unzerlegbare Untermoduln M_1, \dots, M_r für ein $r \in \mathbb{N}$, so sind nach dem Satz von Azumaya-Krull-Schmidt sowohl die Anzahl r der direkten Summanden als auch die Summanden selber bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig

bestimmt.

Im Fall $M \neq 0$ heißt der A -Modul M **irreduzibel** oder **einfach**, falls er nur die beiden Untermoduln 0 und M besitzt. Andernfalls heißt M **reduzibel**.

Nach Schurs Lemma gilt für zwei nichtisomorphe irreduzible A -Moduln M_1 und M_2 stets $\text{Hom}_A(M_1, M_2) = 0$, und $\text{End}_A(M_1)$ ist ein Schiefkörper mit $\dim_F(\text{End}_A(M_1)) < \infty$. Ist F ein endlicher Körper, so ist $\text{End}_A(M_1)$ also insbesondere ein Körper.

Eine Reihe $M =: M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_l := 0$ von A -Moduln heißt **Kompositionsreihe** von M , falls $D_{i+1} := M_i/M_{i+1}$ für alle $i = 0, \dots, l-1$ ein irreduzibler A -Modul ist. Gegebenenfalls nennen wir die M_i/M_{i+1} **Kompositionsfaktoren** und l die **Kompositionslänge** von M . Nach dem Satz von Jordan-Hölder sind sowohl die Kompositionslänge als auch die Kompositionsfaktoren von M bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt. Ist D ein irreduzibler A -Modul, so ist also die Anzahl der zu D isomorphen Kompositionsfaktoren von M wohldefiniert und wird auch mit $[M : D]$ bezeichnet. Ferner verwenden wir die Schreibweise $M \sim D_1 + \dots + D_l$.

Der Modul M heißt **einreihig** oder **uniserial**, falls er genau eine Kompositionsreihe besitzt.

Falls M sich als direkte Summe von irreduziblen A -Moduln schreiben lässt, so nennen wir M **vollständig reduzibel** oder **halbeinfach**.

Ist B eine F -Unteralgebra von A , dann können wir M auch als B -Modul auffassen. Wir bezeichnen diesen mit $\text{Res}_B^A(M)$ und nennen ihn die **Einschränkung** von M auf B . Ist $\text{Res}_B^A(M)$ ein unzerlegbarer (irreduzibler) B -Modul, so ist auch M ein unzerlegbarer (irreduzibler) A -Modul. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Ist N ein B -Modul, so definieren wir den **induzierten Modul** $\text{Ind}_B^A(N) := A \otimes_B N$, auf dem A wie folgt operiert:

$$a(b \otimes n) := ab \otimes n$$

für alle $a, b \in A$, $n \in N$.

Ein echter Untermodul N des A -Moduls M heißt **maximal**, falls es keinen Untermodul L von M mit $N \subset L \subset M$ gibt. Analog definiert man **minimale** Untermoduln.

Für den A -Modul M heißt der Durchschnitt aller maximalen Untermoduln von M das **Jacobson-Radikal** von M und wird mit $\text{Rad}(M)$ oder auch $\text{Rad}_A(M)$ bezeichnet, und der Faktormodul $\text{Hd}(M) := M/\text{Rad}(M)$ heißt **Kopf** von M . Die Summe aller minimalen Untermoduln des A -Moduls M heißt **Sockel** von M und wird mit $\text{Soc}(M)$ oder auch $\text{Soc}_A(M)$ bezeichnet. Außerdem ist M genau dann halbeinfach, wenn $\text{Rad}(M) = 0$ ist.

Die Algebra A selber wird durch die Ringmultiplikation ebenfalls zu einem A -Modul, welcher als der **reguläre** A -Modul bezeichnet wird. In dem Fall verwenden wir für das Jacobson-Radikal $\text{Rad}(A)$ auch die Schreibweise $\mathbf{J}(A)$ sowie $\mathbf{S}(A)$ für den Sockel des regulären A -Moduls. Dabei ist $\mathbf{J}(A)$ stets die Summe aller nilpotenten Ideale in A , also insbesondere selber ein nilpotentes Ideal in A .

Es sei E ein Körper mit $E \supseteq F$. Dann ist $A^E := E \otimes_F A$ eine E -Algebra, und wir können A in A^E vermöge der Zuordnung $a \mapsto 1 \otimes a$ für alle $a \in A$ einbetten. Weiter wird $M^E := E \otimes_F M$ zu einem A^E -Modul, wenn wir

$$(\alpha \otimes a)(\beta \otimes m) := (\alpha\beta) \otimes (am)$$

für alle $\alpha, \beta \in E$, $a \in A$, $m \in M$ setzen. Ein A^E -Modul L heißt **realisierbar** über F , falls es einen A -Modul N mit $L \cong N^E$ gibt. Gegebenenfalls nennen wir N eine **F -Form** von L . Ist M ein unzerlegbarer A -Modul mit der Eigenschaft, dass M^E ein unzerlegbarer A^E -Modul für

jeden Erweiterungskörper E von F ist, so heißt M **absolut unzerlegbar**. Ist M ein irreduzibler A -Modul mit der Eigenschaft, dass M^E für jeden Erweiterungskörper E von F ein irreduzibler A^E -Modul ist, so heißt M **absolut irreduzibel**.

Satz 1.1.2. *Im Fall $A \neq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Die nichtinvertierbaren Elemente in A bilden ein Ideal in A .*
- (ii) *Das Jacobson-Radikal $\mathbf{J}(A)$ ist das einzige maximale Linksideal (und auch das einzige maximale Rechtsideal) in A .*
- (iii) *$A/\mathbf{J}(A)$ ist ein Schiefkörper.*

Definition 1.1.3. Sind die Bedingungen aus obigem Satz erfüllt, so heißt A eine **lokale F -Algebra**.

Satz 1.1.4. (i) *Der A -Modul M ist genau dann unzerlegbar, wenn $\text{End}_A(M)$ eine lokale F -Algebra ist.*

- (ii) *Ist M ein unzerlegbarer A -Modul mit $\text{End}_A(M)/\mathbf{J}(\text{End}_A(M)) \cong F$, so ist M absolut unzerlegbar.*

Bemerkung/Definition 1.1.5. Ein Element $e \in A$ heißt **Idempotent**, falls $e^2 = e$ gilt. Zwei Idempotente e und f in A heißen **orthogonal**, falls $ef = 0 = fe$ gilt. Ein Idempotent $e \in A \setminus \{0\}$ heißt **primitiv**, falls es keine orthogonalen Idempotente $f_1 \neq 0 \neq f_2$ in A mit $e = f_1 + f_2$ gibt. Die in $\mathbf{Z}(A)$ primitiven Idempotente heißen **Blockidempotente** von A .

Wir können stets $1_A = 1_{\mathbf{Z}(A)} = e_1 + e_2 + \cdots + e_r$ mit paarweise orthogonalen Blockidempotenten e_1, \dots, e_r für ein $r \in \mathbb{N}^*$ schreiben. Dies liefert dann eine Zerlegung

$$A = A \cdot \mathbf{Z}(A) = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_r$$

mit unzerlegbaren Idealen $B_i := Ae_i = e_i A$ in A für $i = 1, \dots, r$. Dabei heißt ein Ideal $I \neq 0$ in A unzerlegbar, falls es keine Ideale $I_1 \neq 0 \neq I_2$ in A mit $I = I_1 \oplus I_2$ gibt.

Wir nennen die Ideale B_1, \dots, B_r in obiger Zerlegung die **Blöcke** von A . Jeder Block B_i von A ist selber wieder eine F -Algebra mit Einselement e_i , welches wir auch als **Blockidempotent** von B_i bezeichnen.

Mit diesen Bezeichnungen sagen wir, der A -Modul M **gehört zum Block B_i** , oder B_i **enthält** den Modul M , für ein $i \in \{1, \dots, r\}$, falls $e_i M = M$ und $e_j M = 0$ für alle $j \neq i$ gilt. Offenbar gehört jeder unzerlegbare A -Modul und insbesondere jeder irreduzible A -Modul jeweils zu genau einem Block von A . Ferner sind für einen A -Modul, welcher im Block B_i von A liegt, stets auch alle seine Kompositionsfaktoren in B_i enthalten.

Definition 1.1.6. (i) Eine Folge von A -Homomorphismen $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ mit der Eigenschaft, dass f injektiv, g surjektiv und $\ker(g) = \text{im}(f)$ ist, heißt **kurze exakte Sequenz** von A -Homomorphismen. Falls es außerdem einen Untermodul U von N mit $N = \text{im}(f) \oplus U = \ker(g) \oplus U$ gibt, so sagen wir, die Sequenz **zerfällt**.

- (ii) Der A -Modul M heißt **projektiv**, falls jede kurze exakte Sequenz von A -Homomorphismen der Form $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ zerfällt.

- (iii) Der A -Modul M heißt **injektiv**, falls jede kurze exakte Sequenz von A -Homomorphismen der Form $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ zerfällt.

Bemerkung 1.1.7. Ist U ein injektiver Untermodul von M , so zerfällt dann nach Definition die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/U \longrightarrow 0,$$

wobei f die Inklusionsabbildung und $g : M \longrightarrow M/U$, $m \mapsto m + U$ der kanonische Epimorphismus seien. Nach Teil (i) der obigen Definition bedeutet dies nun wiederum, dass U ein direkter Summand von M ist.

Satz 1.1.8. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Der A -Modul M ist projektiv.*
- (ii) *Zu jedem A -Epimorphismus $f : N \longrightarrow L$ und jedem A -Homomorphismus $g : M \longrightarrow L$ existiert ein A -Homomorphismus $h : M \longrightarrow N$ mit $g = f \circ h$.*
- (iii) *M ist zu einem direkten Summanden eines freien A -Moduls, d.h. eines Moduls der Form $nA = \underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{n \text{ Summanden}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, isomorph.*

Satz 1.1.9. *Ist A eine lokale F -Algebra, so ist jeder projektive A -Modul frei.*

Bemerkung 1.1.10. Sind $m, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ und $A = a_1 A_1 \oplus \cdots \oplus a_m A_m$ eine Zerlegung des regulären A -Moduls mit paarweise nichtisomorphen unzerlegbaren A -Moduln A_1, \dots, A_m , so sind nach Azumaya-Krull-Schmidt sowohl die Anzahl der Summanden als auch die direkten Summanden selbst bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt. Somit bilden A_1, \dots, A_m ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver A -Moduln. Außerdem existieren primitive Idempotente f_1, \dots, f_m in A , so dass $A_i = A f_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt. Ferner gilt mit diesen Bezeichnungen:

Satz 1.1.11. (i) *Die Menge $\{A f_1 / \mathbf{J}(A) f_1, \dots, A f_m / \mathbf{J}(A) f_m\}$ bildet ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen irreduzibler A -Moduln. Insbesondere stimmen also die Anzahl der Isomorphieklassen irreduzibler A -Moduln und die der projektiven unzerlegbaren A -Moduln überein. Ferner tritt jeder Isomorphietyp irreduzibler A -Moduln als Kompositionsfaktor des regulären A -Moduls auf.*

- (ii) *Ist $i \in \{1, \dots, m\}$, so besitzt der A -Modul M genau dann einen zum irreduziblen Modul $A f_i / \mathbf{J}(A) f_i$ isomorphen Kompositionsfaktor, wenn $f_i M \neq 0$ ist.*

Lemma 1.1.12. *Wir setzen $E := \text{End}_A(M)$. Der E -Modul M besitze bis auf Isomorphie genau einen Kompositionsfaktor D , und es gelte $\dim_F(D) = 1$. Dann ist M als A -Modul absolut unzerlegbar.*

Beweis. Nach Satz 1.1.4 genügt es, zu zeigen, dass $E/\mathbf{J}(E) \cong F$ gilt.

Es sei dazu $\{E e_1 / \mathbf{J}(E) e_1, \dots, E e_n / \mathbf{J}(E) e_n\}$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen irreduzibler E -Moduln mit primitiven Idempotenten e_1, \dots, e_n in E . Insbesondere ist $e_i \neq 0$ und somit auch $e_i M = e_i(M) \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach obigem Satz besitzt also M für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ einen zu $E e_i / \mathbf{J}(E) e_i$ isomorphen Kompositionsfaktor. Da nach Voraussetzung M aber bis auf Isomorphie genau einen Kompositionsfaktor besitzt, folgt $n = 1$. Demzufolge ist $E e_1 / \mathbf{J}(E) e_1$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte irreduzible E -Modul und auch der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte irreduzible $E/\mathbf{J}(E)$ -Modul, und dieser hat Dimension 1. Nach dem Satz von Wedderburn ist daher

$$E/\mathbf{J}(E) \cong_{\text{als } F\text{-Algebren}} \text{Mat}(1, \Theta) \cong \Theta \cong e_1 E e_1 / e_1 \mathbf{J}(E) e_1$$

für einen Schiefkörper Θ endlicher F -Dimension. Demzufolge ist E eine lokale F -Algebra und M als A -Modul unzerlegbar. Wegen $\dim_F(e_1 E e_1 / e_1 \mathbf{J}(E) e_1) = 1$ folgt schließlich $\Theta \cong F$, und die Behauptung des Lemmas ist bewiesen. \square

1.2 Darstellungen von Algebren

Definition 1.2.1. Es sei A eine F -Algebra.

- (i) Einen unitären Homomorphismus $\Delta : A \longrightarrow \text{Mat}(n, F)$ mit $n \in \mathbb{N}$ von F -Algebren nennen wir eine **Matrixdarstellung** des **Grades** n von A .
- (ii) Matrixdarstellungen $\Delta_1 : A \longrightarrow \text{Mat}(n, F)$ und $\Delta_2 : A \longrightarrow \text{Mat}(n, F)$ von A heißen **ähnlich**, falls es ein $T \in \text{GL}(n, F)$ gibt, so dass $\Delta_2(a)T = T\Delta_1(a)$ für alle $a \in A$ gilt.

Bemerkung 1.2.2. Es seien A eine F -Algebra und M ein A -Modul mit F -Basis b_1, \dots, b_n . Für $a \in A$ und $i = 1, \dots, n$ ist dann also $ab_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(a)b_j$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\alpha_{ji}(a) \in F$ für $j = 1, \dots, n$. Außerdem erhalten wir eine Matrixdarstellung von A vermöge: $\Delta : A \longrightarrow \text{Mat}(n, F)$, $a \mapsto \Delta(a)$ mit $\Delta(a)_{ji} := \alpha_{ji}(a)$ für alle $a \in A$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Ist umgekehrt $\Gamma : A \longrightarrow \text{Mat}(n, F)$ eine Matrixdarstellung von A , so wird der F -Vektorraum $V := F^n$ mit Standardbasis $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ zu einem A -Modul, indem wir $a\varepsilon_i := \sum_{j=1}^n \Gamma(a)_{ji}\varepsilon_j$ für alle $i = 1, \dots, n$ setzen. Dies zeigt, dass A -Moduln und Matrixdarstellungen von A einander entsprechen. Dabei sind zwei A -Moduln M_1 und M_2 genau dann isomorph, wenn die entsprechenden Matrixdarstellungen ähnlich sind. Ferner ist $\dim_F(M)$ für jeden A -Modul M gleich dem Grad jeder von ihm induzierten Matrixdarstellung von A . Außerdem übertragen sich auf diese Weise Begriffe wie Irreduzibilität, Unzerlegbarkeit usw. von Moduln auf Matrixdarstellungen.

Wir werden weiterhin alle theoretischen Aussagen für Moduln formulieren. Bei allen Computerberechnungen werden wir jedoch mit Matrixdarstellungen arbeiten.

Kapitel 2

Gruppenalgebren

Im Folgenden werden wir uns mit Gruppenalgebren und deren Moduln beschäftigen. Dabei werden wir ab jetzt unter einer Gruppe stets eine endliche Gruppe verstehen. Außerdem sei wie im vorigen Kapitel F wieder ein Körper. Ist nun G eine Gruppe, so ist die **Gruppenalgebra** von G über F definiert als

$$FG := F[G] := \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \alpha_g \in F \text{ für alle } g \in G \right\}.$$

Diese ist mit den Operationen

$$\begin{aligned} \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} \beta_g g \right) &:= \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g, \\ \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) &:= \sum_{g, h \in G} \alpha_g \beta_h gh, \\ \beta \cdot \sum_{g \in G} \alpha_g g &:= \sum_{g \in G} (\beta \alpha_g) g \end{aligned}$$

für $\beta \in F$ tatsächlich eine F -Algebra, und die Elemente von G bilden nach Definition eine F -Basis von FG . Weiter legen wir in diesem Zusammenhang noch einige Notationen fest. Es seien ab jetzt:

- $\text{Syl}_p(G)$ für eine Primzahl p die Menge aller p -Sylowgruppen von G ,
- $\text{Cl}(G)$ die Menge aller Konjugationsklassen von G ,
- $X^+ := \sum_{x \in X} x$ für jede Teilmenge X von G ,
- $\mathbf{Z}(FG)$ das Zentrum von FG , für welches die Menge $\{C^+ \mid C \in \text{Cl}(G)\}$ eine F -Basis bildet,
- $\mathbf{J}(FG)$ das Jacobson-Radikal und $\mathbf{S}(FG)$ der Sockel von FG ,
- $\mathcal{U}(FG)$ die Einheitengruppe von FG .

2.1 Gruppenalgebren und Moduln

In diesem Abschnitt sei G eine Gruppe.

Bemerkung/Definition 2.1.1. Sind M_1 und M_2 zwei FG -Moduln, so werden auch die F -Vektorräume $M_1 \otimes_F M_2$ und $\text{Hom}_F(M_1, M_2)$ zu FG -Moduln mit $g(m_1 \otimes m_2) = gm_1 \otimes gm_2$ sowie $(gf)(m_1) = gf(g^{-1}m_1)$ für alle $g \in G$, $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ und $f \in \text{Hom}_F(M_1, M_2)$.

Der Körper F wird zu einem FG -Modul mit $g\alpha := \alpha$ für alle $g \in G$, $\alpha \in F$. Wir nennen ihn den **trivialen** FG -Modul und verwenden meist die Schreibweise F_G oder einfach wieder F . Ferner bezeichnen wir den Block von FG , welcher den trivialen Modul F_G enthält, als den **Hauptblock** von FG .

Sind M ein FG -Modul und $r \in \mathbb{N}^*$, so wird auch der F -Vektorraum $\bigwedge^r M$ zu einem FG -Modul mit $g(m_1 \wedge \dots \wedge m_r) := (gm_1 \wedge \dots \wedge gm_r)$ für alle $m_1, \dots, m_r \in M$, $g \in G$. Insbesondere ist $\bigwedge^r M = 0$, falls $r > \dim_F(M)$ ist. Außerdem wird $\bigwedge^0 M$ als der triviale FG -Modul F_G aufgefasst.

Ist H eine weitere Gruppe, und sind M ein FG -Modul und N ein FH -Modul, so wird das (äußere) Tensorprodukt $M \otimes_F N$ zu einem $F[G \times H]$ -Modul mit $(g, h)(m \otimes n) = gm \otimes hn$ für alle $m \in M$, $n \in N$, $g \in G$, $h \in H$. Wir verwenden in diesem Fall auch die Notation $M \boxtimes N$.

Für jeden FG -Modul M ist auch $M^* := \text{Hom}_F(M, F)$ ein FG -Modul mit $(gf)(m) = f(g^{-1}m)$ für alle $g \in G$, $m \in M$, $f \in M^*$. Wir nennen diesen den zu M **dualen Modul**. Im Fall $M \cong M^*$ heißt M **selbstdual**. Mit diesen Bezeichnungen gilt außerdem $(M^*)^* \cong M$ und $\text{Hom}_F(M_1, M_2) \cong M_2 \otimes_F M_1^*$ für FG -Moduln M, M_1, M_2 .

Für jedes $g \in G$, jede Untergruppe H von G und jeden FH -Modul N wird $g \otimes_{FH} N$ zu einem $F[gHg^{-1}]$ -Modul mit $(ghg^{-1})(g \otimes n) = g \otimes hn$ für alle $h \in H$, $n \in N$. Wir setzen ${}^g N := g \otimes_{FH} N$ und nennen ihn einen zu N **konjugierten** Modul.

Es seien M ein FG -Modul, H eine Untergruppe von G und N ein FH -Modul. Dann verwenden wir meist die Schreibweise $\text{Res}_H^G(M)$ für die Einschränkung von M auf FH sowie $\text{Ind}_H^G(N)$ für die Induktion von N nach FG .

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir

Satz 2.1.2. *Gegeben seien Untergruppen H_1 und H_2 von G mit $H_2 \leq H_1$, FG -Moduln M, M_1, M_2 , FH_1 -Moduln N, N_1, N_2 und ein FH_2 -Modul L . Dann gilt:*

(i)

$$\begin{aligned} \text{Res}_{H_2}^{H_1}(\text{Res}_{H_1}^G(M)) &= \text{Res}_{H_2}^G(M) \\ \text{Res}_{H_1}^G(M_1 \oplus M_2) &= \text{Res}_{H_1}^G(M_1) \oplus \text{Res}_{H_1}^G(M_2) \\ \text{Res}_{H_1}^G(M_1 \otimes_F M_2) &= \text{Res}_{H_1}^G(M_1) \otimes_F \text{Res}_{H_1}^G(M_2) \\ \text{Res}_{H_1}^G(M^*) &= (\text{Res}_{H_1}^G(M))^*. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{H_1}^G(\text{Ind}_{H_2}^{H_1}(L)) &\cong \text{Ind}_{H_2}^G(L) \\ \text{Ind}_{H_1}^G(N_1 \oplus N_2) &\cong \text{Ind}_{H_1}^G(N_1) \oplus \text{Ind}_{H_1}^G(N_2) \\ \text{Ind}_{H_1}^G(N^*) &\cong (\text{Ind}_{H_1}^G(N))^* \\ \dim_F(\text{Ind}_{H_1}^G(N)) &= |G : H_1| \cdot \dim_F(N). \end{aligned}$$

Satz 2.1.3 (Mackey). *Es seien H_1 und H_2 Untergruppen von G und N ein FH_1 -Modul. Dann gilt:*

$$\text{Res}_{H_2}^G(\text{Ind}_{H_1}^G(N)) \cong \bigoplus_{H_2 g H_1 \in H_2 \backslash G / H_1} \text{Ind}_{H_2 \cap g H_1 g^{-1}}^{H_2}(\text{Res}_{H_2 \cap g H_1 g^{-1}}^{g H_1 g^{-1}}({}^g N)).$$

Satz 2.1.4 (Frobenius-Formel). *Es seien H eine Untergruppe von G , M ein FG -Modul und N ein FH -Modul. Dann ist*

$$M \otimes_F \text{Ind}_H^G(N) \cong \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(M) \otimes_F N).$$

Satz 2.1.5. *Es seien F algebraisch abgeschlossen, M ein irreduzibler projektiver FG -Modul und $Z(G)$ das Zentrum von G . Dann gilt stets $\dim_F(M) \mid |G : Z(G)|$.*

Beweis. Im Fall $\text{char}(F) = 0$ gilt die Behauptung nach [66], Prop. 17. Wir können daher $\text{char}(F) = p > 0$ annehmen. Dann existiert stets ein vollständiger diskreter Bewertungsring R mit maximalem Ideal (π) und Quotientenkörper K der Charakteristik 0, so dass $F = R/(\pi)$ gilt und K ein Zerfällungskörper für G ist. D.h., jeder irreduzible KG -Modul ist absolut irreduzibel. Ferner existiert ein primitives Idempotent e in FG mit $M = FG \cdot e$, und dieses lässt sich nach Charakteristik 0 heben. Das bedeutet, es existiert ein primitives Idempotent ε in RG mit $e = \bar{\varepsilon} := \varepsilon + (\pi)RG$. Es ist also $\widetilde{M} := RG \cdot \varepsilon$ ein projektiver RG -Modul mit $\widetilde{M}/\pi\widetilde{M} \cong M$ als FG -Moduln. Da M irreduzibel ist, ist auch der KG -Modul $K \otimes_R \widetilde{M}$ irreduzibel. Ferner gilt $\dim_K(K \otimes_R \widetilde{M}) = \text{rk}_R(\widetilde{M}) = \dim_F(M)$. Zusammen mit [66], Prop. 17 erhalten wir nun schließlich $\dim_F(M) \mid |G : Z(G)|$. \square

2.2 Relative Projektivität, Vertizes und Quellen

In Kapitel 1 hatten wir bereits den Begriff eines projektiven Moduls für beliebige F -Algebren eingeführt. Im Fall der Gruppenalgebren lässt sich dieser noch verallgemeinern. Dazu sei weiterhin G eine Gruppe.

Satz 2.2.1. *Sind H eine Untergruppe von G und M ein FG -Modul, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Ist $\mathcal{E} : 0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von FG -Moduln mit der Eigenschaft, dass die kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow \text{Res}_H^G(L) \longrightarrow \text{Res}_H^G(N) \longrightarrow \text{Res}_H^G(M) \longrightarrow 0$ von FH -Moduln zerfällt, so zerfällt auch \mathcal{E} .*
- (ii) *Ist $\mathcal{E}' : 0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von FG -Moduln mit der Eigenschaft, dass die kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow \text{Res}_H^G(M) \longrightarrow \text{Res}_H^G(N) \longrightarrow \text{Res}_H^G(L) \longrightarrow 0$ von FH -Moduln zerfällt, so zerfällt auch \mathcal{E}' .*
- (iii) *Es ist $M \mid \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(M))$.*
- (iv) *Für jedes Repräsentantensystem $\{g_1, \dots, g_n\}$ für die Linksnebenklassen von G nach H existiert ein $f \in \text{End}_{FH}(M)$ mit*

$$\text{Tr}_H^G(f) := \sum_{i=1}^n g_i f = \text{id}_M.$$

Dabei heißt die Abbildung $\text{Tr}_H^G : \text{End}_{FH}(M) \longrightarrow \text{End}_{FG}(M)$ relative Spurabbildung.

Definition 2.2.2. Gegebenenfalls heißt der FG -Modul M **relativ H -projektiv**.

Bemerkung 2.2.3. (a) Für $H := \{1\}$ sind die relativ H -projektiven FG -Moduln genau die projektiven FG -Moduln.

- (b) Die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii) in obigem Satz zeigt auch, dass die projektiven FG -Moduln genau die injektiven FG -Moduln sind. Zusammen mit Bemerkung 1.1.7 folgt daraus, dass jeder projektive Untermodul eines FG -Moduls M sogar stets ein direkter Summand von M sein muss. Diese Tatsache wird vor allem für unsere Computerberechnungen eine entscheidende Rolle spielen.

Für den Rest dieses Abschnitts gelte $\text{char}(F) = p > 0$.

Satz 2.2.4. *Es sei M ein unzerlegbarer FG -Modul. Dann existiert eine bis auf Konjugation in G eindeutig bestimmte p -Untergruppe P von G , so dass folgende Aussagen gelten:*

(1) M ist relativ P -projektiv.

(2) Ist M auch relativ H -projektiv für eine Untergruppe H von G , so ist $P \leq_G H$.

Definition 2.2.5. Es gelten die Voraussetzungen aus vorigem Satz. Eine p -Untergruppe von G , welche die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, nennen wir einen **Vertex** von M . Wir werden manchmal auch die Bezeichnung $\text{vx}(M)$ für einen ausgezeichneten Vertex von M verwenden. In diesem Zusammenhang gelten folgende Aussagen:

Lemma 2.2.6. Es seien H eine Untergruppe von G sowie M, M_1 unzerlegbare FG -Moduln mit Vertices P, P_1 und N ein unzerlegbarer FH -Modul mit Vertex Q . Dann gilt:

- (i) Im Fall $M | \text{Ind}_H^G(N)$ ist $P \leq_G Q$.
- (ii) Im Fall $N | \text{Res}_H^G(M)$ ist $Q \leq_G P$.
- (iii) Ist M_2 ein weiterer FG -Modul, und ist $M | (M_1 \otimes_F M_2)$, so ist $P \leq_G P_1$.
- (iv) Der zu M duale Modul M^* hat P ebenfalls als Vertex.

Satz 2.2.7. Es seien M ein unzerlegbarer FG -Modul und P ein Vertex von M .

(i) Dann existiert ein unzerlegbarer FP -Modul S mit folgenden Eigenschaften:

- $M | \text{Ind}_P^G(S)$
- $S | \text{Res}_P^G(M)$
- P ist ein Vertex von S .

(ii) Es sei T ein unzerlegbarer FP -Modul mit $M | \text{Ind}_P^G(T)$. Dann existiert ein $t \in N_G(P)$ mit ${}^tT = S$. Dabei sei $N_G(P)$ der Normalisator von P in G . Ferner ist $T | \text{Res}_P^G(M)$ und P ein Vertex von T .

Definition 2.2.8. Es gelten die Voraussetzungen aus vorigem Satz. Einen FP -Modul, welcher die drei Bedingungen aus (i) erfüllt, nennen wir eine **Quelle** von M .

Abschließend werden wir in diesem Abschnitt noch einige Sätze erwähnen, welche im weiteren Verlauf bei konkreten Vertex- und Quellenberechnungen häufig Anwendung finden werden. Dafür benötigen wir noch folgende Bezeichnungen:

Bemerkung/Definition 2.2.9. (i) Die bezüglich Inklusion maximalen Untergruppen von G , welche als Vertices irreduzibler Moduln eines Blocks $B := FGe$ von FG auftreten, heißen **(p)-Defektgruppen** des Idempotents e beziehungsweise des Blocks B . Diese bilden stets eine Konjugationsklasse von p -Untergruppen von G . Ist p^d für ein $d \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Defektgruppen von B , so heißt d der **(p)-Defekt** von B beziehungsweise e .

(ii) Die Defektgruppen des Hauptblocks von FG sind genau die p -Sylowgruppen von G .

(iii) Ist H eine weitere Gruppe, und sind B ein Block von FG sowie \tilde{B} ein Block von FH , so ist $B \otimes_F \tilde{B}$ ein Block von $FG \otimes_F FH \cong F[G \times H]$. Außerdem haben die Defektgruppen von $B \otimes_F \tilde{B}$ die Form $D \times \tilde{D}$, wobei D eine Defektgruppe von B und \tilde{D} eine von \tilde{B} sind.

Satz 2.2.10 ([28]). Es seien M ein unzerlegbarer FG -Modul, welcher zum Block B von FG gehört. Ferner seien D eine Defektgruppe von B und P eine p -Sylowgruppe von G , die einen Vertex Q von M enthält. Dann gilt:

- (i) Der Modul M ist relativ D -projektiv, d.h. insbesondere $Q \leq_G D$.
- (ii) Es ist stets $|P : Q|$ ein Teiler von $\dim_F(M)$. Insbesondere hat M im Fall $p \nmid \dim_F(M)$ genau die p -Sylowgruppen von G als Vertices.

- (iii) Ist H eine Untergruppe von G , so dass M relativ H -projektiv ist, und ist $\text{Res}_H^G(M) = N_1 \oplus \cdots \oplus N_l$ mit unzerlegbaren FH -Moduln N_1, \dots, N_l , so ist $Q_i \leq_G Q$ für jeden Vertex Q_i von N_i und $i = 1, \dots, l$. Ferner existiert ein $j \in \{1, \dots, l\}$ mit $Q_j \sim_G Q$.
- (iv) Sind H eine Untergruppe von G und N ein unzerlegbarer FH -Modul, so existiert ein unzerlegbarer direkter Summand von $\text{Ind}_H^G(N)$, der mit N einen Vertex sowie eine Quelle gemeinsam hat.

Satz 2.2.11 (Greens Unzerlegbarkeitssatz, [28], Thm.8). Es sei H ein Normalteiler von G , so dass G/H eine p -Gruppe ist. Ferner sei N ein absolut unzerlegbarer FH -Modul. Dann ist auch $\text{Ind}_H^G(N)$ ein absolut unzerlegbarer FG -Modul.

Korollar 2.2.12. Es seien $P \in \text{Syl}_p(G)$, $Q \triangleleft P$ und M ein absolut unzerlegbarer FG -Modul. Ist $\text{Res}_Q^G(M)$ ebenfalls absolut unzerlegbar, so ist Q kein Vertex von M .

Beweis. Wir nehmen an, dass unter obigen Voraussetzungen Q ein Vertex von M ist. Dann ist auch $\text{Res}_P^G(M)$ absolut unzerlegbar und hat nach Satz 2.2.10 (iii) ebenfalls Vertex Q . Folglich gilt

$$\text{Res}_P^G(M) | \text{Ind}_Q^P(\text{Res}_Q^G(M)).$$

Nach Greens Unzerlegbarkeitssatz ist jedoch $\text{Ind}_Q^P(\text{Res}_Q^G(M))$ absolut unzerlegbar, so dass

$$\text{Res}_P^G(M) \cong \text{Ind}_Q^P(\text{Res}_Q^G(M))$$

folgt, im Widerspruch zu $\dim_F(\text{Ind}_Q^P(\text{Res}_Q^G(M))) = |P : Q| \dim_F(M) > \dim_F(M)$. Damit folgt die Behauptung. \square

Satz 2.2.13 ([23], L. III.4.14). Es seien M ein unzerlegbarer FG -Modul und E eine endliche Körpererweiterung von F . Ferner sei P ein Vertex von M . Dann ist P ein Vertex jedes unzerlegbaren direkten Summanden des EG -Moduls M^E .

2.3 Die Greenkorrespondenz

Es seien in diesem Abschnitt G eine Gruppe und F ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Ferner seien P eine p -Untergruppe von G sowie H eine Untergruppe von G mit $N_G(P) \leq H$, und wir setzen

- $\mathcal{X} := \{Q | Q \leq xPx^{-1} \cap P \text{ für ein } x \in G \setminus H\},$
- $\mathcal{Y} := \{Q | Q \leq xPx^{-1} \cap H \text{ für ein } x \in G \setminus H\}.$

Definition 2.3.1. Sind \mathcal{H} eine Menge von Untergruppen von G und M ein FG -Modul, so sagen wir, M ist **relativ \mathcal{H} -projektiv**, falls $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$ gilt für FG -Moduln M_1, \dots, M_k mit der Eigenschaft, dass M_i relativ H_i -projektiv ist für ein $H_i \in \mathcal{H}$ und $i = 1, \dots, k$.

Satz 2.3.2 (Green). Mit obigen Bezeichnungen gelten folgende Aussagen:

- (i) Ist M ein unzerlegbarer FG -Modul mit Vertex P , so gilt $\text{Res}_H^G(M) = M' \oplus Y$, wobei M' ein unzerlegbarer FH -Modul mit Vertex P und Y ein relativ \mathcal{Y} -projektiver FH -Modul sind.
- (ii) Ist N ein unzerlegbarer FH -Modul mit Vertex P , so gilt $\text{Ind}_H^G(N) = N' \oplus X$, wobei N' ein unzerlegbarer FG -Modul mit Vertex P und X ein relativ \mathcal{X} -projektiver FG -Modul sind.

Bemerkung/Definition 2.3.3. Die beiden Aussagen des vorigen Satzes liefern eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen unzerlegbarer FG -Moduln mit Vertex P und den Isomorphieklassen unzerlegbarer FH -Moduln mit Vertex P . Diese heißt **Green-Korrespondenz** bezüglich (G, P, H) .

Ferner werden der FH -Modul M' aus (i) als **Green-Korrespondent** von M in H und der FG -Modul N' aus (ii) als **Green-Korrespondent** von N in G bezeichnet.

2.4 Einschränkungen unzerlegbarer FG -Moduln auf Normalteiler

Weiterhin seien G eine Gruppe und F ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Ferner werden wir in diesem Abschnitt mit FG -Rechtsmoduln arbeiten. Außerdem bezeichnen wir die multiplikative Gruppe des Körpers F mit F^\times , die abelsche Gruppe aller Abbildungen von G nach F^\times mit $C^1(G, F^\times)$ und die abelsche Gruppe aller Abbildungen von $G \times G$ nach F^\times mit $C^2(G, F^\times)$.

Bemerkung 2.4.1. Ein Element $\alpha \in C^2(G, F^\times)$ mit der Eigenschaft

$$\alpha(g, h)\alpha(gh, k) = \alpha(h, k)\alpha(g, hk)$$

für alle $g, h, k \in G$ heißt **Faktorensystem** von G mit Werten in F^\times . Die Menge all dieser Faktorensysteme bildet eine Untergruppe von $C^2(G, F^\times)$ und wird mit $Z^2(G, F^\times)$ bezeichnet. Ferner erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\partial : C^1(G, F^\times) \longrightarrow C^2(G, F^\times), \quad \varphi \mapsto ((g, h) \mapsto \varphi(g)\varphi(h)\varphi(gh)^{-1}).$$

Das Bild von ∂ ist eine Untergruppe von $Z^2(G, F^\times)$, welche mit $B^2(G, F^\times)$ bezeichnet wird. Schließlich setzen wir $H^2(G, F^\times) := Z^2(G, F^\times)/B^2(G, F^\times)$.

Ist der Körper F algebraisch abgeschlossen, so ist $H^2(G, F^\times)$ nach [59], Thm. 3.5.3 eine endliche Gruppe, deren Ordnung nicht durch p teilbar ist. Ferner existiert zu jedem $\bar{\alpha} \in H^2(G, F^\times)$ der Ordnung n stets ein Faktorensystem $\beta \in Z^2(G, F^\times)$, so dass β ebenfalls Ordnung n hat und $\bar{\alpha} = \bar{\beta} := \beta B^2(G, F^\times)$ gilt.

Des Weiteren existiert in dieser Situation eine **zentrale Gruppenerweiterung**

$$1 \longrightarrow Z \xrightarrow{\varepsilon} \widehat{G} \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1,$$

so dass Z eine zyklische Gruppe der Ordnung n ist. D.h., ε ist ein Gruppenmonomorphismus, ν ist ein Gruppenepimorphismus, und es gilt $\ker(\nu) = \text{im}(\varepsilon)$ sowie $\text{im}(\varepsilon) \subseteq Z(\widehat{G})$. Insbesondere ist dann also $\widehat{G}/\varepsilon(Z) \cong G$.

Bemerkung 2.4.2. Ist M ein FG -Rechtsmodul, und setzen wir $E := \text{End}_{FG}(M)$, so wird M zu einem E - FG -Bimodul vermöge $fmg := f(mg) = f(m)g$ für alle $f \in E$, $m \in M$, $g \in G$. Ferner liefert jedes Idempotent e in E stets eine Zerlegung $M = eM \oplus (1 - e)M$ in FG -Rechtsmoduln. Dabei ist eM genau dann unzerlegbar, wenn das Idempotent e primitiv ist. Für zwei Idempotenten e_1 und e_2 in E sind die FG -Rechtsmoduln e_1M und e_2M genau dann isomorph, wenn die projektiven E -Rechtsmoduln e_1E und e_2E isomorph sind. Ist nun $\{e_1E, \dots, e_lE\}$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver E -Rechtsmoduln mit primitiven Idempotenten e_1, \dots, e_l in E , so erhalten wir eine Bijektion zwischen dieser Menge und der Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer direkter Summanden des FG -Rechtsmoduls M . Diese kommt durch die Zuordnung

$$e_iE \mapsto e_iEM = e_iM = e_i(M)$$

für alle $i = 1, \dots, l$ zustande und wird auch als **Fittingkorrespondenz** bezeichnet.

Für die nachfolgenden Lemmata und Sätze werden wir einige Eigenschaften graduierter Algebren und verschränkter Produkte benötigen. Wir fassen an dieser Stelle die für uns in diesem Zusammenhang wesentlichen Aussagen kurz zusammen. Für weitere Details sei auf [59], Kapitel 4.6 verwiesen. Wir nehmen dazu in diesem Abschnitt ab jetzt außerdem an, dass F algebraisch abgeschlossen ist. Ferner seien N eine Untergruppe von G und W ein unzerlegbarer FN -Rechtsmodul mit **Trägheitsgruppe** $I := \{g \in N_G(N) \mid W \otimes g \cong W\}$ in G . Insbesondere ist dann N ein Normalteiler von I . Setzen wir weiter $E := \text{End}_{FI}(\text{Ind}_N^I(W))$ und $\bar{I} := I/N$, so ist E eine **\bar{I} -graduierte F -Algebra**, d.h. es ist

$$E = \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{I}} E_{\bar{x}}$$

mit F -Untervektorräumen $E_{\bar{x}}$ von E , so dass $E_{\bar{x}}E_{\bar{y}} \subseteq E_{\overline{xy}}$ für alle $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{I}$ gilt. Diese Unterräume werden auch als **Komponenten** von E bezeichnet. Genauer gilt in dieser Situation:

$$E_{\bar{x}} = \{f \in E \mid f(W \otimes 1) \subseteq W \otimes x\}$$

für $x \in I$ und $\bar{x} = xN \in \bar{I}$. Ferner ist $E_{\bar{x}} \cong \text{Hom}_{FN}(W, W^x) \cong \text{Hom}_{FN}(W \otimes 1, W \otimes x)$ nach [59], L. 4.6.4 und insbesondere $E_1 \cong \text{End}_{FN}(W)$ mit $1_E \in E_1$.

Da nach Definition von I stets $W \otimes x \cong W$ für alle $x \in I$ gilt, existiert zu jedem $x \in I$ ein FN -Isomorphismus $u_x : W \otimes 1 \longrightarrow W \otimes x$. Dieser lässt sich dann nach [59], L. 4.6.4 und L. 4.6.5 wiederum kanonisch zu einem FI -Automorphismus von $\text{Ind}_N^I(W)$ fortsetzen, welchen wir mit $u_{\bar{x}}$ bezeichnen. Es ist also stets $u_{\bar{x}} \in \mathcal{U}(E) \cap E_{\bar{x}}$, so dass die F -Algebra E sogar ein sogenanntes **verschränktes Produkt** von \bar{I} mit E_1 ist. Man beachte ferner, dass stets $u_{\bar{x}}^{-1} \in E_{\bar{x}^{-1}}$ für alle $\bar{x} \in \bar{I}$ gilt. Daraus folgt dann:

$$E_{\bar{x}} = E_{\bar{x}}u_{\bar{x}}^{-1}u_{\bar{x}} \subseteq E_1u_{\bar{x}} \subseteq E_{\bar{x}} = u_{\bar{x}}u_{\bar{x}}^{-1}E_{\bar{x}} \subseteq u_{\bar{x}}E_1 \subseteq E_{\bar{x}},$$

d.h. $E_{\bar{x}} = u_{\bar{x}}E_1 = E_1u_{\bar{x}}$ für alle $\bar{x} \in \bar{I}$. Insbesondere haben alle Komponenten $E_{\bar{x}}$ dieselbe F -Dimension wie E_1 , und E ist ein freier E_1 -Rechtsmodul vom Rang $|\bar{I}|$.

Schließlich betrachten wir das Jacobson-Radikal $\mathbf{J}(E_1)$ von E_1 . Für jedes $\bar{x} \in \bar{I}$ und die entsprechende Einheit $u_{\bar{x}}$ erhalten wir dann einen Automorphismus von E_1 vermöge:

$$E_1 \longrightarrow E_1, a \mapsto u_{\bar{x}}au_{\bar{x}}^{-1}.$$

Folglich ist $u_{\bar{x}}\mathbf{J}(E_1)u_{\bar{x}}^{-1} = \mathbf{J}(E_1)$ und daher $u_{\bar{x}}\mathbf{J}(E_1) = \mathbf{J}(E_1)u_{\bar{x}}$. Wegen $E_1u_{\bar{x}} = u_{\bar{x}}E_1 = E_{\bar{x}}$ ist somit $J := \mathbf{J}(E_1)E = E\mathbf{J}(E_1)$ ein nilpotentes Ideal in E . Ferner erhalten wir:

$$J = \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{I}} \mathbf{J}(E_1)u_{\bar{x}} \subseteq \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{I}} (J \cap E_{\bar{x}}) \subseteq J,$$

und somit ist auch

$$\overline{E} := E/J = \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{I}} \overline{E_{\bar{x}}}$$

mit $\overline{E_{\bar{x}}} = (E_{\bar{x}} + J)/J \cong E_{\bar{x}}/E_{\bar{x}}\mathbf{J}(E_1)$ für $\bar{x} \in \bar{I}$ eine durch \bar{I} graduierte F -Algebra. Außerdem ist mit E auch \overline{E} wieder ein verschränktes Produkt.

Nach Voraussetzung ist W unzerlegbar, so dass E_1 nach Satz 1.1.4 eine lokale F -Algebra ist. Da F außerdem algebraisch abgeschlossen ist, gilt damit sogar $\overline{E_1} \cong E_1/\mathbf{J}(E_1) \cong F$. Also ist $\dim_F(\overline{E_1}) = \dim_F(\overline{E_{\bar{x}}}) = 1$ für alle $\bar{x} \in \bar{I}$. Man bezeichnet \overline{E} dann auch als **verschränkte Gruppenalgebra**.

Mit diesen Bezeichnungen gelten die folgenden Aussagen:

Lemma 2.4.3. *Die verschränkte Gruppenalgebra \overline{E} bestimmt genau ein Element $\bar{\alpha} \in H^2(\bar{I}, F^\times)$.*

Beweis. Für jedes $\bar{x} \in \bar{I}$ ist zunächst $\overline{u_{\bar{x}}} := (u_{\bar{x}} + J) \in \mathcal{U}(\overline{E}) \cap \overline{E_{\bar{x}}}$ und $\overline{E} = \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{I}} F\overline{u_{\bar{x}}}$.

Somit existiert zu allen $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{I}$ ein $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \in F^\times$ mit $\overline{u_{\bar{x}}} \overline{u_{\bar{y}}} = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \overline{u_{\overline{xy}}}$. Ist \bar{z} ein weiteres Element aus \bar{I} , so erhalten wir

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y})\alpha(\overline{xy}, \bar{z})\overline{u_{\overline{xyz}}} = \alpha(\bar{x}, \bar{y})\overline{u_{\overline{xy}}} \overline{u_{\bar{z}}} = \overline{u_{\bar{x}}} \overline{u_{\bar{y}}} \overline{u_{\bar{z}}} = \overline{u_{\bar{x}}} \alpha(\bar{y}, \bar{z}) \overline{u_{\overline{yz}}} = \alpha(\bar{y}, \bar{z})\alpha(\bar{x}, \overline{yz})\overline{u_{\overline{xyz}}}.$$

Dies zeigt, dass die Abbildung $\alpha : \bar{I} \times \bar{I} \longrightarrow F^\times$, $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \alpha(\bar{x}, \bar{y})$ ein Faktorensystem ist.

Andererseits besteht $\mathcal{U}(\overline{E}) \cap \overline{E_{\bar{x}}}$ genau aus den Elementen der Form $\overline{v_{\bar{x}}} = \varphi(\bar{x})\overline{u_{\bar{x}}}$ für ein $\varphi(\bar{x}) \in F^\times$. Folglich ist

$$\overline{v_{\bar{x}}} \overline{v_{\bar{y}}} = \varphi(\bar{x})\overline{u_{\bar{x}}} \varphi(\bar{y})\overline{u_{\bar{y}}} = \varphi(\bar{x})\varphi(\bar{y})\alpha(\bar{x}, \bar{y})\overline{u_{\overline{xy}}} = \varphi(\bar{x})\varphi(\bar{y})\alpha(\bar{x}, \bar{y})\varphi(\overline{xy})^{-1}\overline{v_{\overline{xy}}}$$

für alle $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{I}$. Auf diese Weise erhalten wir also ein Faktorensystem, welches sich von α nur um ein Element aus $B^2(\bar{I}, F^\times)$ unterscheidet. Demzufolge bestimmt \overline{E} genau ein Element $\bar{\alpha} \in H^2(\bar{I}, F^\times)$. \square

Lemma 2.4.4. *Es sei L ein irreduzibler projektiver \overline{E} -Rechtsmodul. Dann gilt $|\overline{I}|_p \mid \dim_F(L) \mid |\overline{I}|$, wobei $|\overline{I}|_p$ die höchste p -Potenz sei, die $|\overline{I}|$ teilt.*

Beweis. Nach dem vorigen Lemma bestimmt \overline{E} genau ein $\bar{\alpha} \in H^2(\overline{I}, F^\times)$. Nach Bemerkung 2.4.1 ist die Ordnung n von $\bar{\alpha}$ nicht durch p teilbar, und wir können auch annehmen, dass $\bar{\alpha} = \alpha B^2(\overline{I}, F^\times)$ mit $\alpha \in Z^2(\overline{I}, F^\times)$ und $|\langle \alpha \rangle| = |\langle \bar{\alpha} \rangle| = n$ gilt. Nach Bemerkung 2.4.1 existiert somit eine zentrale Gruppenerweiterung

$$1 \longrightarrow Z \xrightarrow{\varepsilon} \widehat{\overline{I}} \xrightarrow{\nu} \overline{I} \longrightarrow 1,$$

wobei Z eine zyklische Gruppe der Ordnung n ist. Ferner existiert ein primitives Idempotent e in der Gruppenalgebra $F\varepsilon(Z)$ mit $eF\widehat{\overline{I}} \cong \overline{E}$. Deswegen können wir nun den \overline{E} -Rechtsmodul L vermöge des Epimorphismus $F\widehat{\overline{I}} \longrightarrow eF\widehat{\overline{I}} \cong \overline{E}$ auch als irreduziblen projektiven Rechtsmodul für die Gruppenalgebra $F\widehat{\overline{I}}$ auffassen. Daher gilt nach Satz 2.2.10 (ii) einerseits

$$|\overline{I}|_p = |\overline{I}|_p |Z|_p = |\widehat{\overline{I}}|_p \mid \dim_F(L).$$

Andererseits ist nach Satz 2.1.5 auch

$$\dim_F(L) \mid |\widehat{\overline{I}} : Z(\widehat{\overline{I}})| \mid |\widehat{\overline{I}} : \varepsilon(Z)| = |\overline{I}|,$$

woraus schließlich die Behauptung des Lemmas folgt. \square

Satz 2.4.5. *Es seien D ein irreduzibler FG -Rechtsmodul mit Vertex Q und Quelle W . Ferner sei V der Green-Korrespondent von D in $H := N_G(Q)$. Dann gilt:*

$$|H : Q|_p \mid \frac{\dim_F(V)}{\dim_F(W)} \mid |H : Q|.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ sei n_p dabei die höchste p -Potenz, die n teilt.

Beweis. Nach [36], Thm. VII.9.3 gilt zunächst

$$\text{Res}_Q^H(V) \cong k(W_1 \oplus \cdots \oplus W_m).$$

Dabei sind $k \in \mathbb{N}^*$ und $W = W_1, \dots, W_m$ paarweise nichtisomorphe, unzerlegbare FQ -Rechtsmoduln mit $W_i \cong W^{h_i}$ für $i = 1, \dots, m$ und passende $h_1, \dots, h_m \in H$. Weiter bezeichnen wir analog zu obiger Bemerkung mit I die Trägheitsgruppe von W in H . Dann ist $m = |H : I|$.

Da W nach Voraussetzung eine Quelle von V ist, gilt weiter $V \mid \text{Ind}_Q^H(W)$. Nach [36], Thm. VII.9.6 existiert genauer ein unzerlegbarer direkter Summand U von $\text{Ind}_Q^H(W)$ mit $V \cong \text{Ind}_I^H(U)$. Insbesondere ist also $\dim_F(U) = k \dim_F(W)$. Setzen wir nun $E := \text{End}_{FI}(\text{Ind}_Q^H(W))$, so entspricht U via Fittingkorrespondenz einem bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten unzerlegbaren projektiven E -Rechtsmodul eE . Dabei ist e ein primitives Idempotent in E , und U ist als FI -Rechtsmodul zu $e \text{Ind}_Q^H(W)$ isomorph.

Wir verwenden wieder die Bezeichnungen aus obiger Bemerkung. Dann ist E also eine durch $\overline{I} := I/Q$ graduierte F -Algebra der F -Dimension $|\overline{I}| \dim_F(E_1)$, und $\overline{E} := E/\mathbf{J}(E_1)E$ ist eine verschränkte Gruppenalgebra der F -Dimension $|\overline{I}|$. Ferner ist der \overline{E} -Rechtsmodul $\overline{eE} := eE/eE\mathbf{J}(E_1)$ auch unzerlegbar projektiv und nach [48], Rem. 3.2 sogar irreduzibel. Folglich muss $|\overline{I}|_p \mid \dim_F(\overline{eE}) \mid |\overline{I}|$ nach Lemma 2.4.4 gelten.

Wir betrachten nun den E -Linksmodul $E \otimes_{E_1} W = \text{Ind}_{E_1}^E(W)$. Dieser wird vermöge folgender Konstruktion sogar ein E - FI -Bimodul:

Es seien $w \in W$, $x \in I$ und $u_x : W \otimes 1 \longrightarrow W \otimes x$ ein FQ -Isomorphismus wie in obiger Bemerkung. Weiter sei $u_{\bar{x}}$ der entsprechende FI -Automorphismus von $\text{Ind}_Q^H(W)$. Setzen wir dann $(f \otimes w)x := fu_{\bar{x}} \otimes u_{\bar{x}}^{-1}(w \otimes x)$ für alle $w \in W$, $x \in I$ und $f \in E$, so wird $E \otimes_{E_1} W$ zu einem FI -Rechtsmodul. Ist zusätzlich $f' \in E$, so gilt ferner

$$f'[(f \otimes w)x] = f'[fu_{\bar{x}} \otimes u_{\bar{x}}^{-1}(w \otimes x)] = f'fu_{\bar{x}} \otimes u_{\bar{x}}^{-1}(w \otimes x) = (f'f \otimes w)x = [f'(f \otimes w)]x,$$

so dass also $E \otimes_{E_1} W$ auf diese Weise tatsächlich ein E - FI -Bimodul wird. In obiger Bemerkung haben wir auch gesehen, dass $\text{Ind}_Q^I(W) = W \otimes_{FQ} FI$ ein E - FI -Bimodul und W ein E_1 - FQ -Bimodul sind. Vermöge der Abbildung

$$E \otimes_{E_1} W \longrightarrow W \otimes_{FQ} FI, f \otimes w \mapsto f(w \otimes 1)$$

erhalten wir nach [48], Prop. 1.1 einen Isomorphismus von E - FI -Bimoduln, und wegen $U \cong e \text{Ind}_Q^I(W)$ ist dann auch die Abbildung

$$eE \otimes_{E_1} W \longrightarrow U, ef \otimes w \mapsto ef(w \otimes 1)$$

ein Isomorphismus von FI -Rechtsmoduln.

Da eE ein projektiver E -Rechtsmodul ist, ist er auch ein projektiver E_1 -Rechtsmodul und insbesondere ein freier E_1 -Rechtsmodul, denn E_1 ist nach obiger Bemerkung eine lokale F -Algebra. Somit ist $eE \cong rE_1$ für ein $r \in \mathbb{N}^*$. Demzufolge erhalten wir

$$\begin{aligned} k \dim_F(W) &= \dim_F(U) = \dim_F(eE \otimes_{E_1} W) = \dim_F(rE_1 \otimes_{E_1} W) \\ &= r \dim_F(E_1 \otimes_{E_1} W) = r \dim_F(W). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $k = r = \text{rk}_{E_1}(eE) = \text{rk}_{\overline{E_1}}(\overline{eE}) = \dim_F(\overline{eE})$ gilt. Somit ist k die Dimension des irreduziblen \overline{E} -Rechtsmoduls \overline{eE} , und nach obigen Überlegungen ist $|I : Q|_p \mid k \mid |I : Q|$. Multiplikation dieser Gleichung mit $|H : I|$ liefert schließlich

$$|H : Q|_p \mid k |H : I| = \frac{\dim_F(V)}{\dim_F(W)} \mid |H : Q|.$$

□

Korollar 2.4.6. *Es gelten die Voraussetzungen des vorigen Satzes. Ferner sei $Q \leq K \leq H$ mit $|K : Q| \not\equiv 0 \pmod{p}$, und es sei $\text{Res}_K^H(V)$ ein unzerlegbarer FK -Rechtsmodul. Dann ist Q eine p -Sylowgruppe von G .*

Beweis. Es ist wieder

$$\text{Res}_Q^H(V) = \text{Res}_Q^K(\text{Res}_K^H(V)) \cong s(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n)$$

mit $s \in \mathbb{N}^*$ und paarweise nichtisomorphen unzerlegbaren und in K konjugierten FQ -Rechtsmoduln $W = W_1, \dots, W_n$. Dabei ist hier $n = |K : L|$, wobei L die Trägheitsgruppe von W in K bezeichne. Wie im Beweis des vorigen Satzes erhalten wir, dass s gleich der F -Dimension eines projektiven irreduziblen Moduls für die verschränkte Gruppenalgebra \overline{E} ist. Dabei seien $E := \text{End}_{FL}(\text{Ind}_Q^L(W))$, welche eine L/Q -graduierte F -Algebra ist und $\overline{E} = E/\mathbf{J}(E_1)E$, wobei E_1 die 1-Komponente von E im Sinne von Bemerkung 2.4.2 bezeichne. Somit gilt:

$$|L : Q|_p \mid s \mid |L : Q|$$

nach Lemma 2.4.4. Da nach Voraussetzung $p \nmid |K : Q|$ ist, sind auch $|L : Q|$ und $|K : L|s = \dim_F(V)/\dim_F(W)$ nicht durch p teilbar. Nach Satz 2.4.5 folgt nun $p \nmid |H : Q|$. Demnach ist Q eine p -Sylowgruppe von $H = N_G(Q)$ und daher auch eine von G . □

2.5 Vertizes irreduzibler FG -Moduln

Es seien wieder G eine Gruppe und F ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

Bemerkung 2.5.1. (a) Wir können die Gruppenalgebra FG stets als Modul für die Gruppenalgebra $F[G \times G]$ auffassen, indem wir

$$(g_1, g_2)a := g_1 a g_2^{-1}$$

für alle $g_1, g_2 \in G$, $a \in FG$ setzen. Auf diese Weise entsprechen die Ideale von FG gerade den Untermoduln des $F[G \times G]$ -Moduls FG . Insbesondere sind die unzerlegbaren direkten Summanden des $F[G \times G]$ -Moduls FG genau die Blöcke von FG .

- (b) Sind H eine Untergruppe von G , b ein Block von FH und B ein Block von FG , so sagen wir, B **korrespondiert mit** b , und schreiben $B = b^G$, falls $b \mid \text{Res}_{H \times H}^{G \times G}(B)$ gilt (als $F[H \times H]$ -Moduln) und B der einzige Block von FG mit dieser Eigenschaft ist. Falls es überhaupt einen Block von FG gibt, mit dem b korrespondiert, sagen wir, b^G **ist definiert**.

Lemma 2.5.2 ([1], L. 14.1). *Es seien H eine Untergruppe von G , b ein Block von FH und D eine Defektgruppe von b . Falls $C_G(D)$ in H enthalten ist, so ist b^G definiert.*

Definition 2.5.3. Es seien P eine p -Untergruppe von G , b ein Block von $F[PC_G(P)]$ und B ein Block von FG mit $B = b^G$.

- (i) Das Paar (P, b) heißt dann ein **B -Paar**.
(ii) Ist P zusätzlich eine Defektgruppe von b , so heißt (P, b) ein **B -Brauerpaar**.

Satz 2.5.4 ([48], Cor. 3.6, Cor. 3.7). *Es sei M ein irreduzibler FG -Modul, welcher zum Block B von FG gehört. Ferner sei P ein Vertex von M . Dann existieren*

- ein B -Brauerpaar (P, b) und
- eine Defektgruppe D von B mit $C_D(P) \leq P \leq D$.

Falls D abelsch ist, gilt also insbesondere $P = D$.

2.6 Rangvarietäten

Der Begriff der Rangvarietät eines Moduls stammt aus der homologischen Algebra. Es zeigt sich, dass diese Rangvarietäten in einigen Situationen ein nützliches Hilfsmittel für die Berechnung von Vertizes bilden. Dazu seien in diesem Abschnitt F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$ und G eine Gruppe. Ferner bezeichnen wir für $n \in \mathbb{N}^*$ mit $F[X_1, \dots, X_n]$ den Polynomring in n Variablen über F . Zu Beginn fassen wir einige Aussagen über affine Varietäten zusammen.

Bemerkung 2.6.1. Für jede Teilmenge S von $F[X_1, \dots, X_n]$ nennt man

$$V(S) := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n \mid f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \text{ für alle } f \in S\}$$

eine **affine F -Varietät** (in F^n). Ist $I \subseteq F[X_1, \dots, X_n]$ das von S erzeugte Ideal, so gilt stets $V(I) = V(S)$.

Ist umgekehrt Y eine Teilmenge von F^n , so definiert man

$$J(Y) := \{f \in F[X_1, \dots, X_n] \mid f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \text{ für alle } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Y\}.$$

Dies ist ein Ideal in $F[X_1, \dots, X_n]$. Auf diese Weise erhält man also Abbildungen

$$\{\text{Teilmengen von } F[X_1, \dots, X_n]\} \xrightleftharpoons[J]{V} \{\text{Teilmengen von } F^n\}.$$

Nach Hilberts Nullstellensatz induzieren diese beiden Abbildungen zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der affinen F -Varietäten in F^n und der Menge der Radikalideale in $F[X_1, \dots, X_n]$. Dabei heißt ein Ideal I in $F[X_1, \dots, X_n]$ **Radikalideal**, falls I gleich dem Durchschnitt aller Primideale in $F[X_1, \dots, X_n]$ ist, welche I enthalten.

Eine affine F -Varietät V heißt **irreduzibel**, falls für zwei affine F -Varietäten V_1 und V_2 mit $V = V_1 \cup V_2$ stets $V = V_1$ oder $V = V_2$ folgt. Außerdem ist V genau dann irreduzibel, wenn das Ideal $J(V)$ ein Primideal in $F[X_1, \dots, X_n]$ ist.

Die **Krull-Dimension** einer irreduziblen F -Varietät V ist definiert als die maximale Länge einer aufsteigenden Kette $J(V) \subset J_1 \subset \dots \subset J_m$ von Primidealen in $F[X_1, \dots, X_n]$. Wir verwenden

für diese Krull-Dimension auch die Bezeichnung $\dim(V)$.

Ist V eine beliebige nichtleere affine F -Varietät, so lässt sich V in eindeutiger Weise als Vereinigung irreduzibler affiner F -Varietäten V_1, \dots, V_k mit $V_j \not\subseteq V_i$ für $j \neq i$ schreiben. Die Krull-Dimension von V ist dann definiert als $\dim(V) := \max\{\dim(V_i) | i = 1, \dots, k\}$.

Definition 2.6.2. Es sei $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \cong E := \langle g_1, \dots, g_n \rangle \leq G$ eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^n für ein $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Für $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n \setminus \{0\}$ setzen wir

$$u_\alpha := 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (g_i - 1) \in \mathcal{U}(FE).$$

Die von u_α erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung p nennen wir eine **zyklische verschobene Untergruppe** von FE .

(ii) Ist M ein FG -Modul, so definieren wir die **Rangvarietät** von M bezüglich g_1, \dots, g_n vermöge:

$$V_E^r(M) := \{\alpha \in F^n \setminus \{0\} \mid \text{Res}_{F\langle u_\alpha \rangle}^{FG}(M) \text{ ist nicht frei}\} \cup \{0\}.$$

Bemerkung 2.6.3. (a) Die so definierte Rangvarietät $V_E^r(M)$ ist nach [11], Thm. 9.3.1 eine affine F -Varietät im Sinne obiger Bemerkung. Ferner ist $V_E^r(M)$ eine homogene F -Varietät, d.h. aus $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_E^r(M)$ folgt auch $\beta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_E^r(M)$ für alle $\beta \in F$.

(b) Die Rangvarietät $V_E^r(M)$ hängt dabei nicht nur von der elementarabelschen Gruppe E , sondern auch von den Erzeugern g_1, \dots, g_n ab. Die Krulldimension $\dim(V_E^r(M))$ ist jedoch stets unabhängig von der Wahl der Erzeuger von E .

(c) Schließlich definieren wir die **Komplexität** von M vermöge

$$c_G(M) := \max\{\dim(V_A^r(M)) \mid A \leq G \text{ elementarabelsche } p\text{-Gruppe}\},$$

wobei $\dim(V_A^r(M))$ jeweils wieder die Krull-Dimension von $V_A^r(M)$ sei. Falls G selber elementarabelsch ist, gilt insbesondere $c_G(M) = \dim(V_G^r(M))$.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir dann:

Satz 2.6.4 ([11], Prop. 9.7.2, Thm. 9.6.4). Für FE -Moduln N, N_1 und N_2 gilt:

- (i) $V_E^r(N_1 \oplus N_2) = V_E^r(N_1) \cup V_E^r(N_2)$.
- (ii) $V_E^r(N_1 \otimes_F N_2) = V_E^r(N_1) \cap V_E^r(N_2)$.
- (iii) $V_E^r(N^*) = V_E^r(N)$.

Satz 2.6.5 ([68], L. 4.4). Ein FG -Modul M ist genau dann projektiv, wenn $c_G(M) = 0$ gilt.

Kapitel 3

Die symmetrischen Gruppen

Im Folgenden bezeichnen wir für $n \in \mathbb{N}^*$ die symmetrische Gruppe des Grades n stets mit \mathfrak{S}_n und die alterierende Gruppe des Grades n mit \mathfrak{A}_n . Ist M eine beliebige endliche Menge, so bezeichne $\mathfrak{S}(M)$ die volle Permutationsgruppe von M . In diesem Kapitel werden wir zu Beginn die für den weiteren Verlauf dieser Arbeit wichtigen Aussagen über symmetrische Gruppen und deren Sylowgruppen zusammenfassen. Anschließend werden wir uns mit den Moduln der symmetrischen Gruppen und deren kombinatorischer Charakterisierung beschäftigen. Beweise zu den zitierten Sätzen findet man zum Beispiel in [37] und [40].

3.1 Die Sylowgruppen der symmetrischen Gruppen

Bemerkung 3.1.1. Es seien $n, m \in \mathbb{N}^*$. Sind G eine Gruppe und H eine Untergruppe von \mathfrak{S}_n , so ist das **Kranzprodukt** von G mit H definiert als:

$$W := G \wr H := \{(x_1, \dots, x_n; \sigma) \mid x_1, \dots, x_n \in G, \sigma \in H\}.$$

Dies wird mit der Operation $(x_1, \dots, x_n; \sigma) \cdot (y_1, \dots, y_n; \pi) := (x_1 y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_n y_{\sigma^{-1}(n)}; \sigma\pi)$ für alle $(x_1, \dots, x_n; \sigma), (y_1, \dots, y_n; \pi) \in W$ eine Gruppe der Ordnung $|G|^n |H|$. Ferner besitzt W eine zu H isomorphe Untergruppe $\tilde{H} := \{(1, \dots, 1; \sigma) \mid \sigma \in H\}$ und einen zu G^n isomorphen Normalteiler $\tilde{G} := \{(x_1, \dots, x_n; 1) \mid x_1, \dots, x_n \in G\}$, welchen wir als die **Basisgruppe** von W bezeichnen. Außerdem ist mit diesen Bezeichnungen $W = \tilde{G}\tilde{H}$ und $\tilde{H} \cap \tilde{G} = \{1\}$.

Falls G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_m ist, kann man W auch als Untergruppe von \mathfrak{S}_{mn} vermöge des folgenden Gruppenmonomorphismus auffassen:

$$\psi : W \longrightarrow \mathfrak{S}_{mn}, (x_1, \dots, x_n; \sigma) \mapsto \left(\begin{matrix} (j-1)m + i \\ (\sigma(j)-1)m + x_{\sigma(j)}(i) \end{matrix} \right)_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}.$$

Setzen wir $G_i := \{(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1; 1) \mid x_i \in G\}$ für $i = 1, \dots, n$, so ist G_i eine zu G isomorphe Untergruppe von W . Ferner operiert $\psi(G_i)$ genauso auf der Menge $\{(i-1)m + 1, \dots, im\}$ wie G auf $\{1, \dots, m\}$, und $\psi(\tilde{H})$ permutiert die Mengen $\{1, \dots, m\}, \dots, \{(n-1)m + 1, \dots, nm\}$ so, wie H auf $\{1, \dots, n\}$ operiert. Wir werden dann $\psi(\tilde{G})$ auch als die Basisgruppe von $\psi(W)$ bezeichnen.

Ist ferner K eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_l für ein $l \in \mathbb{N}^*$, so gilt nach [40], 4.1.23:

$$\psi[\psi(G \wr H) \wr K] \cong \psi[G \wr \psi(H \wr K)].$$

Wir können somit auch einfach die Schreibweise $\psi(G \wr H \wr K)$ verwenden.

Kranzprodukte kommen insbesondere als Sylowgruppen der symmetrischen Gruppen vor. Es sei dazu ab jetzt p eine Primzahl, und wir betrachten die zyklische Gruppe $C_p := \langle (1, \dots, p) \rangle$. Nach [40], 4.1.20 ist dann $P_{p^i} := \psi(\wr^i C_p) := \psi(C_p \wr \dots \wr C_p)$ eine p -Sylowgruppe von \mathfrak{S}_{p^i} für alle $i \in \mathbb{N}$.

Ist weiter $n = \sum_{j=0}^r \alpha_j p^j$ die p -adische Entwicklung von n , so sind die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n nach [40], 4.1.22 isomorph zu $\prod_{j=0}^r (P_{p^j})^{\alpha_j}$. Im Folgenden werden wir in diesem Zusammenhang mit P_n stets diejenige p -Sylowgruppe von \mathfrak{S}_n der folgenden Form bezeichnen: $P_n = P_{p^r,1} \times \cdots \times P_{p^r,\alpha_r} \times P_{p^{r-1},1} \times \cdots \times P_{p^{r-1},\alpha_{r-1}} \times \cdots \times P_{p,1} \times \cdots \times P_{p,\alpha_1}$. Dabei seien

- $P_{p^r,1} := \psi(\wr^r C_p)$,
- $P_{p^j,i_j} := (1, 1 + k(i_j)) \cdots (p^j, p^j + k(i_j)) \cdot P_{p^j} \cdot (1, 1 + k(i_j)) \cdots (p^j, p^j + k(i_j))$

für alle $j = 1, \dots, r$, $i_j = 1, \dots, \alpha_j$ und $k(i_j) := \sum_{a=j+1}^r \alpha_a p^a + (i_j - 1)p^j$. Wir werden dann auch meist einfach wieder die Schreibweise $P_n = \prod_{j=0}^r (P_{p^j})^{\alpha_j}$ verwenden.

Ist P eine p -Sylowgruppe von \mathfrak{S}_n , so ist offenbar $Q := P \cap \mathfrak{A}_n$ eine p -Sylowgruppe der alternierenden Gruppe \mathfrak{A}_n . Insbesondere setzen wir $Q_n := P_n \cap \mathfrak{A}_n$. Im Fall $p > 2$ ist dann also $P_n = Q_n$, und im Fall $p = 2$ gilt $|P_n : Q_n| = 2$.

Lemma 3.1.2. *Für jedes $l \in \mathbb{N}^*$ ist $Z(P_{p^l}) = \langle z_l \rangle$ mit $z_l := (1, \dots, p)(p+1, \dots, 2p) \cdots (p^l - p + 1, \dots, p^l)$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach l . Für $l = 1$ gilt diese offensichtlich. Wir können also $l \geq 2$ annehmen und setzen $W := P_{p^{l-1}} \wr C_p$. Ein Element $(x_1, \dots, x_p; \sigma) \in W$ liegt offenbar genau dann in $Z(W)$, wenn $x_i y_{\sigma^{-1}(i)} = y_i x_{\pi^{-1}(i)}$ für alle $i = 1, \dots, p$ sowie alle $y_1, \dots, y_p \in P_{p^{l-1}}$ und alle $\pi \in C_p$ gilt. Mit $y_1 = \dots = y_p := 1$ und $\pi := (1, \dots, p)$ folgt daraus zunächst $x_1 = \dots = x_p$. Setzen wir nun $\pi := 1$, so folgt weiter $x_i y_{\sigma^{-1}(i)} = y_i x_i$ für alle $i = 1, \dots, p$. Wir nehmen nun noch $\sigma \neq 1$ an. Dann ist σ also ein p -Zyklus, und wir setzen $y_1 = \dots = y_{p-1} := 1 \neq y_p$. Damit erhalten wir wegen $x_{\sigma(p)} y_p = x_{\sigma(p)}$ jedoch sofort den Widerspruch $y_p = 1$. Demzufolge ist $\sigma = 1$ und $x_1 = \dots = x_p \in Z(P_{p^{l-1}})$. Nach Induktion ist $Z(P_{p^{l-1}}) = \langle z_{l-1} \rangle$ und somit $Z(P_{p^l}) = \psi(Z(W)) = \langle \psi((z_{l-1}, \dots, z_{l-1}; 1)) \rangle = \langle (1, \dots, p)(p+1, \dots, 2p) \cdots (p^l - p + 1, \dots, p^l) \rangle$. \square

Lemma 3.1.3. *Es seien $N := N_{\mathfrak{S}_{p^2}}(P_{p^2})$ und $y \in P_{p^2}$ mit $y \sim_N x := \psi((1, \dots, 1; (1, \dots, p)))$. Dann ist stets $|C_{P_{p^2}}(y)| = p^2$.*

Beweis. Wir setzen dazu $\sigma := (1, \dots, p)$ und $C := C_{C_p \wr C_p}((1, \dots, 1; \sigma))$. Mit denselben Argumenten wie im Beweis des vorigen Lemmas erhalten wir dann auch hier, dass ein Element $(x_1, \dots, x_p; \tau)$ aus $C_p \wr C_p$ genau dann in C liegt, wenn $\tau \in C_{C_p}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$ und $x_1 = \dots = x_p$ gilt. Folglich ist $|C| = p^2$ und damit auch $|C_{P_{p^2}}(x)| = p^2$. Genauer gilt

$$C_{P_{p^2}}(x) = \langle \psi((\sigma, \dots, \sigma; 1)), \psi((1, \dots, 1; \sigma)) \rangle.$$

Da außerdem $x = g y g^{-1}$ für ein $g \in N$ ist, erhalten wir auch $C_{P_{p^2}}(x) = g C_{P_{p^2}}(y) g^{-1}$, so dass schließlich die Behauptung folgt. \square

Lemma 3.1.4 ([60], L. 4.1, L. 4.2). *Es sei wie in obiger Bemerkung $n = \sum_{j=0}^r \alpha_j p^j$ die p -adische Entwicklung von $n \in \mathbb{N}^*$. Ferner sei P eine p -Sylowgruppe von \mathfrak{S}_n . Dann gilt:*

- $N_{\mathfrak{S}_n}(P) \cong \prod_{j=0}^r \psi(N_{\mathfrak{S}_{p^j}}(P_{p^j}) \wr \mathfrak{S}_{\alpha_j})$,
- $N_{\mathfrak{S}_{p^j}}(P_{p^j}) \cong N_{\psi(\mathfrak{S}_{p^{j-1}} \wr \mathfrak{S}_p)}(\psi(P_{p^{j-1}} \wr C_p))$ für alle $j = 1, \dots, r$.

Lemma 3.1.5. *Es seien $l \in \mathbb{N}^*$, $p^k \leq p^l \leq n$ und $P_{p^k} \leq P_{p^l} \leq P_n \leq \mathfrak{S}_n =: G$. Dann besitzt P_{p^l} genau p^{l-k} in G zu P_{p^k} konjugierte Untergruppen. Ist ferner $P := x P_{p^k} x^{-1} \leq P_{p^l}$ für ein $x \in G$, dann existiert stets ein $y \in P_{p^l}$ mit $P = y P_{p^k} y^{-1}$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung mittels Induktion nach $l - k$. Im Fall $k = 0$ ist nichts zu tun. Im Fall $l - k = 0$ ist $P_{p^k} = P_{p^l}$, und wir können $y := 1$ setzen. Es sei nun also $l > l - k > 0$. Nach Bemerkung 3.1.1 ist $P_{p^l} = \psi(P_{p^{l-1}} \wr \langle (1, \dots, p) \rangle)$, und für $g := \psi(1, \dots, 1; (1, \dots, p))$ gilt $B = \prod_{i=0}^{p-1} g^i P_{p^{l-1}} g^{-i}$. Dabei bezeichne B die Basisgruppe von P_{p^l} . Wegen $k < l$ besitzt jedes Element in P einen Fixpunkt auf $\{1, \dots, p^l\}$, so dass $P \leq B$ nach [60], L. 4.2. folgt. Außerdem besitzt P genau eine nichttriviale Bahn Λ auf $\{1, \dots, p^l\}$, und diese hat Länge p^k . Folglich muss Λ in einer der p Bahnen von B und P in einem der Basisgruppenfaktoren $g^i P_{p^{l-1}} g^{-i}$ enthalten sein. Somit ist $g^{-i} x P_{p^k} x^{-1} g^i \leq P_{p^{l-1}}$ für ein $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Nach Induktion besitzt $P_{p^{l-1}}$ genau p^{l-1-k} zu P_{p^k} konjugierte Untergruppen, und es existiert ein $h \in P_{p^{l-1}}$ mit $g^{-i} x P_{p^k} x^{-1} g^i = h P_{p^k} h^{-1}$. Setzen wir nun $y := g^i h$, so erhalten wir schließlich $y \in P_{p^l}$ und $P = y P_{p^k} y^{-1}$. Ferner besitzt P_{p^l} genau $p \cdot p^{l-1-k} = p^{l-k}$ zu P_{p^k} konjugierte Untergruppen. \square

Bemerkung/Korollar 3.1.6. Wir betrachten wieder $n \in \mathbb{N}^*$ und die feste p -Sylowgruppe P_n von $\mathfrak{S}_n =: G$ aus Bemerkung 3.1.1. Falls dann P eine in G zu P_{p^k} konjugierte Untergruppe von P_n ist für ein $k = 0, \dots, r$, so muss offenbar $P \leq P_{p^l, i_l}$ für ein $l \geq k$ und $1 \leq i_l \leq \alpha_l$ gelten. Aus dem vorigen Lemma und Bemerkung 3.1.1 folgt weiter, dass P_{p^l, i_l} genau p^{l-k} zu P_{p^k} konjugierte Untergruppen besitzt und dass diese in P_{p^l, i_l} zu $(1, 1 + k(i_l)) \cdots (p^l, p^l + k(i_l)) \cdot P_{p^k} \cdot (1, 1 + k(i_l)) \cdots (p^l, p^l + k(i_l))$ konjugiert sind. Insbesondere erhalten wir, dass die in P_n enthaltenen p -Zyklen von \mathfrak{S}_n genau die Elemente $(1, \dots, p), (p+1, \dots, 2p), \dots, (n - \alpha_0 - p + 1, \dots, n - \alpha_0)$ und deren Potenzen sind.

3.2 Kombinatorische Hilfsmittel

In der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen spielen kombinatorische Hilfsmittel wie Partitionen, Young-Diagramme und Abaki eine entscheidende Rolle. Wir werden diese im Folgenden genauer betrachten und einige ihrer wichtigsten Eigenschaften zusammenfassen.

Kompositionen und Partitionen

Definition 3.2.1. (i) Eine **Komposition** von n ist eine Folge $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ natürlicher Zahlen mit $|\lambda| := \sum_{i=1}^n \lambda_i = n$. Wir bezeichnen die λ_i als **Teile** von λ . Die Menge aller Kompositionen von n bezeichnen wir mit \mathcal{C}_n . Ferner setzen wir $\mathcal{C}_0 := \{\emptyset\}$.

(ii) Eine **Partition** von n ist eine Komposition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ von n mit der Eigenschaft $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. In diesem Fall verwenden wir die Notation $\lambda \vdash n$. Ist $\lambda_j = \dots = \lambda_n = 0$ für ein $j \in \{2, \dots, n\}$, so schreiben wir auch $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1})$ und bezeichnen $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}$ als die **Teile** von λ . Ferner bezeichnen wir die Menge aller Partitionen von n mit \mathcal{P}_n und setzen $\mathcal{P}_0 := \{\emptyset\}$.

(iii) Ist $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \vdash n$ mit $\lambda_1 = \dots = \lambda_{a_1} = l_1 > \lambda_{a_1+1} = \dots = \lambda_{a_1+a_2} = l_2 > \dots > \lambda_{a_1+\dots+a_{k-1}+1} = \dots = \lambda_{a_1+\dots+a_k} = \lambda_n = l_k$ für gewisse $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, so schreiben wir auch $\lambda = (l_1^{a_1}, l_2^{a_2}, \dots, l_k^{a_k})$.

(iv) Es seien $q \in \mathbb{N}^*$ und $\lambda = (l_1^{a_1}, l_2^{a_2}, \dots, l_k^{a_k}) \vdash n$. Wir nennen λ eine **q -reguläre** Partition von n , falls $a_i < q$ für alle $i = 1, \dots, k$ gilt. Andernfalls bezeichnen wir λ als **q -singuläre** Partition von n . Gilt $l_i - l_{i+1} < q$ für $i = 1, \dots, k$, so heißt λ eine **q -beschränkte** Partition von n . Die Menge aller q -regulären Partitionen von n bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_{n,q}$.

(v) Für jede Partition $\lambda = (l_1^{a_1}, l_2^{a_2}, \dots, l_k^{a_k})$ von n definieren wir die dazu **konjugierte Partition**

$$\lambda' := ((a_1 + \dots + a_k)^{l_k}, (a_1 + \dots + a_{k-1})^{l_{k-1}-l_k}, \dots, (a_1 + a_2)^{l_2-l_3}, a_1^{l_1-l_2}).$$

Das Young-Diagramm der zu λ konjugierten Partition λ' erhält man, indem man $[\lambda]$ transponiert. Für unser Beispiel bedeutet das also $\lambda' = (7, 4, 3, 2^2)$, und das entsprechende Young-Diagramm ist

$$[\lambda'] = \begin{array}{ccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square & & & \\ \square & \square & \square & & & & \\ \square & \square & & & & & \end{array}.$$

- (ii) Zu jeder Partition λ von n und jedem $q \in \mathbb{N}^*$ erhält man aus $[\lambda]$ das **q -Reste-Diagramm** $[\lambda]_q$, indem man jeden Knoten $(i, j) \in [\lambda]$ durch die Restklasse $\overline{j-i}$ von $j-i$ modulo q ersetzt. Wir verwenden im Folgenden auch die Schreibweise $\overline{(i, j)}$ und sprechen vom **q -Rest** des Knotens (i, j) . Für obiges Beispiel und $q = 3$ ist $[\lambda]_q$ also von der Form

$$[\lambda]_3 = \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & & \\ 0 & 1 & & & \\ 2 & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}.$$

Ferner definieren wir zu λ und q das q -Tupel $\gamma := (\gamma_0, \dots, \gamma_{q-1})$, wobei γ_i die Anzahl der Knoten von $[\lambda]$ mit q -Rest \bar{i} sei, und bezeichnen γ als **q -Inhalt** von $[\lambda]$ beziehungsweise λ .

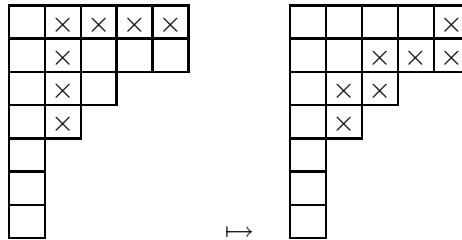
- (iii) Zu jedem Knoten (i, j) von $[\lambda]$ sei der (i, j) -**Haken** H_{ij} von $[\lambda]$ definiert als

$$H_{ij} := \{(i, j') \in [\lambda] \mid j' \geq j\} \cup \{(i', j) \in [\lambda] \mid i' \geq i\}.$$

Die entsprechende **Hakenlänge** sei $h_{ij} := |H_{ij}| = \lambda_i + (\lambda')_j + 1 - i - j$.

Wir erhalten aus dem Young-Diagramm $[\lambda]$ das **Hakendiagramm** von λ , indem wir jeden Knoten $(i, j) \in [\lambda]$ durch die entsprechende Hakenlänge h_{ij} ersetzen.

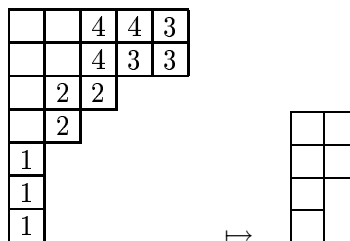
- (iv) Der **Rand** des Young-Diagramms $[\lambda]$ besteht aus allen Knoten $(i, j) \in [\lambda]$ mit der Eigenschaft $(i+1, j+1) \notin [\lambda]$. Unter einem **Randhaken** der Länge l von $[\lambda]$ verstehen wir dann einen zusammenhängenden Teil des Randes von $[\lambda]$, bestehend aus l Knoten, den man von $[\lambda]$ entfernen kann und so das Young-Diagramm einer Partition von $n-l$ erhält. Es existiert immer eine natürliche Bijektion zwischen den Haken und den Randhaken eines Diagramms $[\lambda]$. Dabei erhält man den (i, j) -**Randhaken** R_{ij} dadurch, dass man alle Knoten des Hakens H_{ij} von $[\lambda]$ nach rechts unten auf den Rand projiziert. Wir verdeutlichen dies wieder am Beispiel $\lambda = (5^2, 3, 2, 1^3)$, $(i, j) := (1, 2)$:



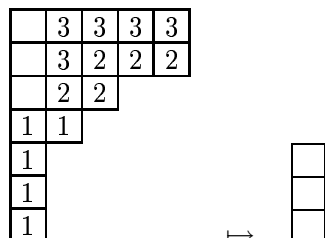
Offenbar gilt auch stets $|H_{ij}| = |R_{ij}|$.

- (v) Für $\lambda \vdash n$ und $q \in \mathbb{N}^*$ entfernen wir sukzessive alle möglichen **q -Randhaken**, d.h. Randhaken der Länge q , von $[\lambda]$. Dabei ist es unerheblich, in welcher Reihenfolge diese gestrichen werden. Das resultierende Diagramm $[\tilde{\lambda}]$ hat immer die gleiche Form. Wir nennen $\tilde{\lambda}$ den **q -Kern** von λ . Die Anzahl der q -Randhaken, die gestrichen werden müssen, um von $[\lambda]$ zu $[\tilde{\lambda}]$ zu gelangen, bezeichnen wir als das **q -Gewicht** von λ . Für $\lambda = (5^2, 3, 2, 1^3)$ bedeutet das:

- im Fall $q := 3$:



- im Fall $q := 5$:



Folglich hat λ den 3-Kern $(2^2, 1^2)$ und 3-Gewicht 4 sowie 5-Kern (1^3) und 5-Gewicht 3. Man sieht auch, dass jeder q -Randhaken stets jeweils genau einen Knoten von jedem q -Rest enthalten muss.

Young-Tableaux und Tabloide

Bemerkung/Definition 3.2.4. (i) Ist λ eine Partition von n , so erhält man ein λ -(**Young**)-**Tableau** t , indem man jeden Knoten des Young-Diagramms $[\lambda]$ durch eine der Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$ ohne Wiederholung ersetzt. Ist zum Beispiel $\lambda := (2, 1) \vdash 3$, so sehen die λ -Tableaux wie folgt aus:

1	2	2	1	1	3	3	1	2	3	3	2
3		3		2		2		1		1	

- (ii) Die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_n operiert für $\lambda \vdash n$ auf der Menge aller λ -Tableaux auf folgende Weise. Ist $t = (t_{ij})$ ein λ -Tableau, und ist $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, dann setzen wir $\sigma t := (\sigma(t_{ij}))$. So ist etwa

$$(123) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Für jedes $\lambda \vdash n$ und jedes λ -Tableau t definieren wir den **Spaltenstabilisator** C_t von t als diejenige Untergruppe von \mathfrak{S}_n mit der Eigenschaft, dass genau dann $\sigma \in C_t$ gilt, wenn i und $\sigma(i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ in derselben Spalte von t liegen. Analog definieren wir den **Zeilenstabilisator** R_t von t .

Beispiel. Ist $n = 7$, $\lambda = (4, 2, 1)$ und

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

so ist also $R_t = \mathfrak{S}(\{1, 2, 3, 7\}) \times \mathfrak{S}(\{4, 5\})$ und $C_t = \mathfrak{S}(\{1, 4, 6\}) \times \mathfrak{S}(\{2, 5\})$.

Allgemein ist stets $R_t \cong \mathfrak{S}_\lambda$ und $C_t \cong \mathfrak{S}_{\lambda'}$ für jedes λ -Tableau t .

- (iv) Zwei λ -Tableaux t_1 und t_2 heißen **zeilenäquivalent**, falls es ein $\sigma \in R_{t_1}$ mit $\sigma t_1 = t_2$ gibt. Gegebenenfalls schreiben wir $t_1 \sim_r t_2$. Dies liefert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller λ -Tableaux. Für jedes λ -Tableau t bezeichnen wir mit $\{t\}$ die Äquivalenzklasse von t bezüglich \sim_r und nennen diese ein λ -**Tabloid**. Hat das Tableau t Zeilen t_1, \dots, t_s , so verwenden wir für $\{t\}$ auch die Schreibweise

$$\{t\} =: \frac{\frac{t_1}{\frac{t_2}{\vdots}}}{t_s}.$$

Ferner induziert die Operation von \mathfrak{S}_n auf den λ -Tableaux eine Operation auf den λ -Tabloiden.

- (v) Sind $\lambda \vdash n$ und t ein λ -Tableau, so definieren wir das zugehörige **Polytabloid** $e_t := \kappa_t\{t\}$, wobei $\kappa_t := \sum_{\pi \in C_t} (\text{sgn } \pi)\pi$ sei. Dabei beachte man, dass ein solches Polytabloid tatsächlich vom Tableau t selber, nicht nur vom Tabloid $\{t\}$ abhängt. Dann operiert \mathfrak{S}_n auch auf der Menge der Polytabloide. Es ist nämlich

$$e_{\sigma t} = \kappa_{\sigma t}\{\sigma t\} = \sigma \kappa_t \sigma^{-1}\{\sigma t\} = \sigma \kappa_t\{t\} = \sigma e_t$$

für alle λ -Tableaux t und alle $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- (iv) Für $\lambda \vdash n$ heißt ein λ -Tableau t **Standardtableau**, falls die Einträge in den Zeilen von links nach rechts und in den Spalten von oben nach unten wachsen. Ein λ -Tabloid $\{t\}$ heißt **Standardtabloid**, falls t zu einem Standardtableau zeilenäquivalent ist, und ein Polytabloid e_t heißt **Standardpolytabloid**, falls t ein Standardtableau ist.

Beispiel 3.2.5. • Ist $\lambda := (n)$, so existiert genau ein λ -Tabloid, nämlich $\{1 \dots n\}$. Der Spaltenstabilisator des Tableaus $1 \dots n$ ist die triviale Untergruppe von \mathfrak{S}_n , so dass $e_{1 \dots n} = \{1 \dots n\}$ ist.

- Ist $\lambda = (1^n)$, so existiert eine Bijektion zwischen \mathfrak{S}_n und der Menge aller λ -Tabloide. Setzen wir

$$t := \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array},$$

so ist offenbar $\kappa_t = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\text{sgn } \pi)\pi$, $e_t = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\text{sgn } \pi)\{\pi t\}$ und daher $e_{\sigma t} = (\text{sgn } \sigma)e_t$ für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Der Abakus

Definition 3.2.6. Es seien $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ eine Partition von n und $t \in \mathbb{N}$ mit $t \geq s$. Die Folge $\beta_t(\lambda) := (\beta_1, \dots, \beta_t)$ natürlicher Zahlen mit

$$\beta_i := \begin{cases} \lambda_i - i + t & , \text{ falls } i \leq s \\ -i + t & , \text{ falls } i > s \end{cases}$$

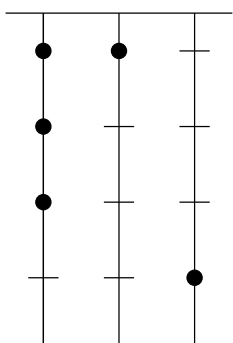
für $i = 1, \dots, t$ heißt **t -elementige β -Folge für λ** .

Eine solche β -Folge lässt sich für jedes $q \in \mathbb{N}^*$ auf einem **Abakus** mit q Läufern darstellen. Dabei hat der Abakus an jeder der Stellen β_1, \dots, β_t eine Perle.

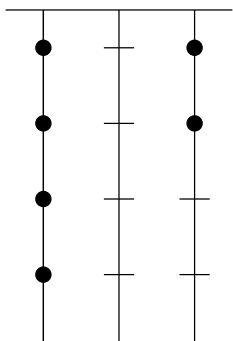
0	1	2	\dots	$q-1$
q	$q+1$	$q+2$	\dots	$2q-1$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots

Abakus mit q Lauern

Beispiel 3.2.7. (i) Es seien $t = 5$, $q = 3$, $\lambda = (7, 3, 1)$. Dann ist $\beta_t(\lambda) = (11, 6, 3, 1, 0)$, und der zugehörige Abakus hat die Form



(ii) Es seien $t = 6$, $q = 3$, $\lambda = (4, 2^2, 1^2)$. Dann erhalten wir $\beta_t(\lambda) = (9, 6, 5, 3, 2, 0)$ und den Abakus



Bemerkung 3.2.8. (a) Wir betrachten eine Partition λ von n und eine β -Folge für λ , die auf einem Abakus mit q Lauern dargestellt ist.

- Verschieben wir eine Perle auf einem der Lauer um eine Position nach oben, so entspricht dies dem Streichen eines q -Randhakens im Young-Diagramm $[\lambda]$ von λ . Kann keine Perle mehr nach oben verschoben werden, so ist die dargestellte Partition also ein q -Kern. Für die Partition aus Beispiel 3.2.7 (ii) ist dies der Fall.
- Verschieben wir für ein $i \in \{1, \dots, q-1\}$ eine Perle des i -ten Lauers um eine Position nach links auf den $(i-1)$ -ten Lauer, so entspricht dies dem Entfernen eines Knotens vom Young-Diagramm von λ .

(b) Ist also $\beta_t(\lambda)$ für $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \vdash n$ und $t \geq s$ auf einem Abakus mit q Lauern dargestellt, so erhält man für den q -Kern $\tilde{\lambda}$ von λ die Abakusdarstellung von $\beta_t(\tilde{\lambda})$, indem man alle Perlen so weit wie möglich nach oben verschiebt.

Außerdem gilt:

Lemma 3.2.9. *Es sei die β -Folge $\beta_t(\lambda) := (\beta_1, \dots, \beta_t)$ von $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \vdash n$ mit $s \leq t$ auf einem Abakus mit $q \in \mathbb{N}^*$ Läufern dargestellt. Dann haben die Knoten von $[\lambda]$, welche Perlen auf dem i -ten Läufer entsprechen, alle denselben q -Rest $\overline{i - t}$.*

Beweis. Wir betrachten dazu eine Perle auf Läufer i , die zu einem Knoten von $[\lambda]$ gehört. Diese entspricht also einer Stelle β_a von $\beta_t(\lambda)$, und nach Definition gilt:

$$\beta_a = \lambda_a - a + t \equiv i \pmod{q}.$$

Wegen $\overline{(a, \lambda_a)} = \overline{\lambda_a - a} = \overline{i - t}$ folgt die Behauptung. \square

Abschließend fassen wir noch einige wesentliche Aussagen über den Zusammenhang zwischen Partitionen und Young-Diagrammen zusammen.

Satz 3.2.10. *Es seien λ und μ Partitionen von n und $q \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:*

- (i) *Das q -Gewicht von λ ist gleich der Anzahl aller durch q teilbaren Einträge im Hakendiagramm von λ .*
- (ii) *Hat λ den q -Inhalt $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{q-1})$ und q -Gewicht w , so hat der q -Kern $\tilde{\lambda}$ von λ den q -Inhalt $\tilde{\gamma} = (\gamma_0 - w, \dots, \gamma_{q-1} - w)$.*
- (iii) *Die Partitionen λ und μ haben genau dann denselben q -Kern, wenn sie denselben q -Inhalt haben.*

3.3 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

Es seien F ein Körper und $n \in \mathbb{N}^*$. Wir werden nun die wesentlichen Eigenschaften der für diese Arbeit wichtigen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln zusammenfassen. Wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, stehen diese Moduln in engem Zusammenhang mit Young-Tableaux, Partitionen und anderen kombinatorischen Hilfsmitteln.

Definition 3.3.1. Es sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ eine Partition von n . Dann definieren wir M^λ als den F -Vektorraum, dessen Basiselemente die verschiedenen λ -Tabloide sind. Indem wir die Operation aus Bemerkung 3.2.4 von \mathfrak{S}_n auf den λ -Tabloiden linear fortsetzen, wird M^λ zu einem $F\mathfrak{S}_n$ -Modul. Ferner gilt:

Satz 3.3.2 ([37], 4.2). *Der so definierte $F\mathfrak{S}_n$ -Modul M^λ ist isomorph zum Permutationsmodul von \mathfrak{S}_n auf der Young-Untergruppe \mathfrak{S}_λ , d.h. es gilt $M^\lambda \cong \text{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n}(F)$. Ferner ist M^λ ein zyklischer $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, welcher von jedem λ -Tabloid erzeugt wird, und es gilt*

$$\dim_F(M^\lambda) = \frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_s!}.$$

Bemerkung 3.3.3. Wir betrachten wieder eine Partition λ von n und den zugehörigen $F\mathfrak{S}_n$ -Permutationsmodul M^λ . Ferner seien $d := \dim_F(M^\lambda)$ und $\{\{t_1\}, \dots, \{t_d\}\}$ die aus allen λ -Tabloiden bestehende F -Basis von M^λ . Dann erhalten wir zunächst eine F -Bilinearform $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ auf M^λ vermöge

$$\langle \{t_i\} | \{t_j\} \rangle_1 := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Setzen wir nun $\langle m_1 | m_2 \rangle_2 := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \langle \sigma m_1 | \sigma m_2 \rangle_1$ für alle $m_1, m_2 \in M^\lambda$, so liefert dies eine F -Bilinearform $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ auf M^λ , welche sogar \mathfrak{S}_n -invariant ist. D.h., es gilt stets $\langle m_1 | m_2 \rangle_2 = \langle \pi m_1 | \pi m_2 \rangle_2$ für alle $m_1, m_2 \in M^\lambda$ und alle $\pi \in \mathfrak{S}_n$.

Dies hat insbesondere zur Folge, dass für jeden Untermodul N von M^λ auch das bezüglich $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ orthogonale Komplement N^\perp wieder ein Untermodul von M^λ ist.

Definition 3.3.4. Für jede Partition λ von n sei S^λ der von der Menge $\{e_t : t \text{ ist } \lambda\text{-Tableau}\}$ aufgespannte Untermodul von M^λ . Dieser Modul heißt **Spechtmodul** zur Partition λ .

Satz 3.3.5 ([37] 4.5, Thm. 4.6, Thm. 4.8, Thm. 4.12, Thm. 8.15, Thm. 9.2, Cor. 13.18, Thm. 20.1). Es sei $\lambda \vdash n$. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Der Spechtmodul S^λ ist ein zyklischer $F\mathfrak{S}_n$ -Modul und wird für jedes λ -Tableau t vom zugehörigen Polytabloid e_t erzeugt.

(ii) **Hakenformel:** Es ist stets

$$\dim_F(S^\lambda) = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in [\lambda]} h_{ij}}.$$

Dabei sei h_{ij} jeweils die in Bemerkung/Definition 3.2.3 (iii) eingeführte Länge des (i, j) -Hakens von $[\lambda]$. Ferner bilden die λ -Standardpolytabloide stets eine F -Basis von S^λ .

(iii) **Untermodulsatz:** Für jeden $F\mathfrak{S}_n$ -Untermodul U von M^λ ist entweder $S^\lambda \subseteq U$ oder $U \subseteq (S^\lambda)^\perp$. Dabei sei $(S^\lambda)^\perp$ das orthogonale Komplement von S^λ bezüglich der Bilinearform $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ aus Bemerkung 3.3.3.

(iv) **Branching-Rule:** Falls $\text{char}(F) = 0$ ist, so gilt:

- $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(S^\lambda) \cong \bigoplus_{\mu} S^\mu$. Dabei wird über alle Partitionen μ von $n-1$ summiert, deren Young-Diagramme aus $[\lambda]$ durch Entfernen eines Knotens entstehen.
- $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(S^\lambda) \cong \bigoplus_{\nu} S^\nu$. Dabei wird über alle Partitionen ν von $n+1$ summiert, deren Young-Diagramme aus $[\lambda]$ durch Hinzufügen eines Knotens entstehen.

(v) Es ist stets $S^\lambda \otimes S^{(1^n)} \cong (S^{\lambda'})^*$. Dabei sei wie üblich λ' die zu λ konjugierte Partition.

(vi) Im Fall $\text{char}(F) = 0$ ist jeder $F\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul selbstdual und absolut irreduzibel. Ferner bildet $\{S^\lambda | \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln. Außerdem besitzt M^λ für jede Partition λ von n dann genau einen zu S^λ isomorphen Kompositionsfaktor. Ist S^μ ein weiterer Kompositionsfaktor von M^λ , so gilt $\mu \triangleright \lambda$.

(vii) Falls $\text{char}(F) \neq 2$ oder λ eine 2-reguläre Partition von n ist, so ist der Spechtmodul S^λ unzerlegbar.

Bemerkung 3.3.6. (a) Im Fall $\text{char}(F) = p > 0$ ist ein Spechtmodul im Allgemeinen nicht mehr irreduzibel. Jedoch besitzt jeder Permutationsmodul M^λ nach wie vor eine Filtrierung der Form

$$M^\lambda = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_k \supseteq M_{k+1} = 0,$$

so dass M_i/M_{i+1} für $i = 0, \dots, k$ zu einem Spechtmodul isomorph ist. Die Vielfachheit, mit der ein Spechtmodul S^μ dabei auftritt, ist stets wohldefiniert und stimmt mit der Vielfachheit von S^μ als Kompositionsfaktor von M^λ in Charakteristik 0 überein.

(b) Für jeden $F\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul S^λ besitzt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(S^\lambda)$ unabhängig von der Charakteristik stets eine Spechtfiltrierung, d.h. eine Filtrierung

$$S^\lambda = S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_l \supseteq S_{l+1} = 0,$$

so dass S_i/S_{i+1} für $i = 0, \dots, l$ zu einem Spechtmodul isomorph ist. Die dabei auftretenden Faktoren sind genau die aus Satz 3.3.5 (iv). Analog besitzt auch $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(S^\lambda)$ stets eine Spechtfiltrierung, und die Faktoren sind die aus Satz 3.3.5 (iv). Außerdem existiert stets ein Block B von FG , welcher den Spechtmodul S^λ enthält.

- (c) [[39], Thm. 3.1] Ist $\lambda \vdash n$ und $M^\lambda = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_r$ eine Zerlegung in unzerlegbare $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln, so existiert genau ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $S^\lambda \subseteq Y_i$. Wir setzen $Y^\lambda := Y_i$ und nennen diesen Modul den **Young-Modul** zur Partition λ . Umgekehrt ist für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ der Summand Y_j zu einem Young-Modul Y^{μ^j} für ein $\mu^j \vdash n$ mit $\mu^j \succeq \lambda$ isomorph. Sind $\mu, \nu \in \mathcal{P}_n$ mit $\mu \neq \nu$, so ist $Y^\mu \not\cong Y^\nu$. Die Vielfachheit, mit der ein Young-Modul Y^μ als direkter Summand von M^λ auftritt, ist stets wohldefiniert. Sie wird mit $\kappa_{\lambda\mu}$ bezeichnet und heißt **Kostka-Zahl**. Insbesondere ist also $\kappa_{\lambda\lambda} = 1$.

Bemerkung 3.3.7. Wie bereits erwähnt, bilden die Spechtmoduln ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln in Charakteristik 0, jedoch nicht in Charakteristik $p > 0$. Ist $\text{char}(F) = p > 0$, so setzen wir für jede p -reguläre Partition λ von n

$$D^\lambda := S^\lambda / \text{Rad}(S^\lambda).$$

Dies ist dann ein selbstdualer, absolut irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul. Ferner bildet $\{D^\mu \mid \mu \in \mathcal{P}_{n,p}\}$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln. Weiter gilt mit diesen Bezeichnungen:

Satz 3.3.8 ([37], 12.2). Ist $\text{char}(F) = p > 0$ und $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$, so ist stets $[S^\lambda : D^\lambda] = 1$. Ist D^μ ein weiterer Kompositionsfaktor von S^λ , so gilt $\mu \triangleright \lambda$. Sind λ eine p -singuläre Partition von n und D ein Kompositionsfaktor von S^λ , so ist $D \cong D^\mu$ für ein $\mu \in \mathcal{P}_{n,p}$ mit $\mu \triangleright \lambda$.

Beispiel 3.3.9. (i) Im Fall $\lambda = (n)$ existiert genau ein λ -Tabloid, nämlich $\{1 \dots n\}$. Es ist also stets $M^{(n)} = S^{(n)} \cong F$ der triviale $F\mathfrak{S}_n$ -Modul.

(ii) Ist $\lambda = (1^n)$, so hatten wir in Beispiel 3.2.5 gesehen, dass jedes λ -Tabloid genau einem Element aus \mathfrak{S}_n entspricht. Ist etwa $\{t^\sigma\}$ das λ -Tabloid zur Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, und ist $\pi \in \mathfrak{S}_n$, so gilt $\pi\{t^\sigma\} = \{t^{\pi\sigma}\}$ nach Bemerkung/Definition 3.2.4. Dies zeigt, dass $M^{(1^n)} \cong F\mathfrak{S}_n$ ist. Ferner ist $S^{(1^n)}$ eindimensional, und Beispiel 3.2.5 zeigt auch, dass jedes $\pi \in \mathfrak{S}_n$ auf $S^{(1^n)}$ durch Multiplikation mit $\text{sgn}(\pi)$ operiert. Wir nennen $S^{(1^n)}$ den **alternierenden $F\mathfrak{S}_n$ -Modul** und verwenden manchmal auch die Schreibweise $S^{(1^n)} = \text{sgn}_n$ oder einfach sgn . Im Fall $\text{char}(F) = 2$ ist insbesondere $S^{(1^n)} \cong S^{(n)} \cong F$. Den Block von $F\mathfrak{S}_n$, der den alternierenden Modul enthält, bezeichnen wir ferner als den **alternierenden Block** von $F\mathfrak{S}_n$.

(iii) Im Fall $\lambda = (n-1, 1)$ ist die Anzahl der λ -Tabloide gleich n . Jedes solche ist durch den Eintrag in der zweiten Zeile eindeutig bestimmt. Folglich ist $\dim(M^{(n-1,1)}) = n$. Ist außerdem Δ eine Matrixdarstellung von $M^{(n-1,1)}$ bezüglich der aus allen $(n-1, 1)$ -Tabloiden bestehenden Basis, so gilt

$$\Delta(\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ und $i, j = 1, \dots, n$. Wir nennen $M^{(n-1,1)}$ den **natürlichen Permutationsmodul**, $S^{(n-1,1)}$ den **natürlichen Spechtmodul** und $D^{(n-1,1)}$ den **natürlichen irreduziblen Modul** für $F\mathfrak{S}_n$, falls $\text{char}(F) = p > 0$ ist.

Bemerkung 3.3.10. (a) Ist $\text{char}(F) = 0$ und λ eine beliebige Partition von n , so ist $S^\lambda \otimes \text{sgn}_n = S^\lambda \otimes S^{(1^n)} \cong S^{\lambda'}$ nach Satz 3.3.5 (v), (vi).

(b) Ist $\text{char}(F) = p > 0$ und $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$, so ist mit D^λ auch $D^\lambda \otimes \text{sgn}_n$ ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul. Es muss also ein $\mu \in \mathcal{P}_{n,p}$ mit $D^\lambda \otimes \text{sgn}_n \cong D^\mu$ geben. Die 1995 bewiesene Mullineux-Vermutung trifft eine Aussage darüber, wie die Partition μ aussieht. Einen Beweis für die Mullineux-Vermutung sowie eine genaue Beschreibung, wie man μ aus λ konstruieren kann, findet man zum Beispiel in [7]. Wir verwenden in diesem Zusammenhang die Bezeichnung $\mathbf{m}(\lambda) := \mu$ und nennen diese Partition die zu λ **Mullineux-konjugierte** Partition.

3.4 Die Blöcke von $F\mathfrak{S}_n$ und ihre Defektgruppen

Es seien in diesem Abschnitt wieder $n \in \mathbb{N}^*$, \mathfrak{S}_n die symmetrische Gruppe des Grades n und F ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Wir werden uns in den nachfolgenden Kapiteln hauptsächlich mit den irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln und deren Vertizes beschäftigen. Im vorigen Abschnitt hatten wir gesehen, dass diese irreduziblen Moduln stets durch die p -regulären Partitionen von n parametrisiert sind. Die 1947 von Brauer und Robinson bewiesene Nakayama-Vermutung liefert eine ebenfalls rein kombinatorische Bedingung dafür, dass zwei irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln im selben Block liegen.

Satz 3.4.1 (Nakayama-Vermutung). *Es seien $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{n,p}$. Die irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln D^λ und D^μ liegen genau dann im selben Block von $F\mathfrak{S}_n$, wenn die Partitionen λ und μ denselben p -Kern besitzen.*

Bemerkung 3.4.2. Der Satz zeigt also, dass ein Block B von $F\mathfrak{S}_n$, welcher einen irreduziblen Modul D^λ enthält, durch den p -Kern $\tilde{\lambda}$ von λ parametrisiert ist. Wir sprechen daher auch vom (p) -Kern des Blocks B sowie vom (p) -Gewicht w von B , falls λ das p -Gewicht w hat. Nach Satz 3.2.10 wissen wir ferner, dass zwei Partitionen genau dann denselben p -Kern besitzen, wenn sie denselben p -Inhalt haben. Daher kann jedem Block auch ein eindeutig bestimmter p -Inhalt zugeordnet werden.

Nach Bemerkung 3.3.6 ist für jede Partition ν von n der $F\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul S^ν in einem Block von $F\mathfrak{S}_n$ enthalten. Der entsprechende p -Kern dieses Blocks ist auch der p -Kern von ν , und das p -Gewicht ist das p -Gewicht von ν .

Nach Satz 2.2.10 ist jeder Vertex eines irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduls stets in einer Defektgruppe seines Blocks enthalten. Aus diesem Grund ist es für die Vertexberechnungen wichtig, die Defektgruppen der Blöcke von $F\mathfrak{S}_n$ zu kennen. Auch diese besitzen eine kombinatorische Charakterisierung.

Satz 3.4.3 ([40], Thm. 6.2.25). *Ist B ein Block von $F\mathfrak{S}_n$ vom p -Gewicht w , so sind die Defektgruppen von B in \mathfrak{S}_n konjugiert zu P_{pw} .*

Korollar 3.4.4. *Ist D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, welcher in einem Block B vom p -Gewicht $w < p$ liegt, so sind die Vertizes von D genau die Defektgruppen von B .*

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus vorigem Satz und Satz 2.5.4. □

Bemerkung 3.4.5. Ist also $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$ eine Partition vom p -Gewicht w , so ist der irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul D^λ stets relativ projektiv bezüglich der p -Sylogruppen von \mathfrak{S}_{pw} . Im Fall $p > 2$ stimmen diese mit den p -Sylogruppen von \mathfrak{A}_{pw} überein. Für $p = 2$ ist jedoch $Q_{pw} < P_{pw}$. Hier lässt sich über die relative Projektivität von D^λ Genaueres sagen.

Satz 3.4.6 ([70], S. 3.6.2). *Es seien $p = 2$ und $\lambda \in \mathcal{P}_{n,2}$. Der zugehörige irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul D^λ ist genau dann relativ \mathfrak{A}_n -projektiv, wenn gilt*

- $\lambda_{2j-1} - \lambda_{2j} \leq 2$ für alle $j > 0$,
- $\lambda_{2j-1} + \lambda_{2j} \not\equiv 2 \pmod{4}$.

*Gegebenenfalls heißt λ auch **S-Partition**.*

Korollar 3.4.7. *Sind $p = 2$, $\lambda \in \mathcal{P}_{n,p}$ eine S-Partition vom Gewicht w und Q ein Vertex des irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduls D^λ , so gilt $Q \leq_{\mathfrak{S}_n} Q_{2w}$.*

3.5 Relative Projektivität irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln

Weiterhin gelten die Voraussetzungen aus vorigem Abschnitt.

Lemma 3.5.1. *Es seien D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, welcher zum Block B von $F\mathfrak{S}_n$ gehört. Ferner habe B das p -Gewicht w , und es sei Q ein Vertex von D mit $Q \leq \mathfrak{S}_{pw}$. Dann gilt:*

- $Q \in \text{Syl}_p(QC_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q))$,
- $\{Z(Q)\} = \text{Syl}_p(C_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q))$.

Beweis. Nach Satz 2.5.4 existiert zunächst ein Block b von $F[QC_{\mathfrak{S}_n}(Q)]$ mit Defektgruppe Q . Nach [61] gilt ferner $QC_{\mathfrak{S}_n}(Q) = QC_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q) \times \mathfrak{S}_{n-pw}$, und b lässt sich in der Form $b \cong b^0 \otimes b^1$ schreiben. Dabei sind b^0 der Hauptblock von $F[QC_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q)]$ und b^1 ein Block von $F\mathfrak{S}_{n-pw}$ vom Defekt 0. Nach Bemerkung/Definition 2.2.9 ist Q somit eine Defektgruppe von b^0 , d.h. eine p -Sylowgruppe von $QC_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q)$. Wegen

$$|QC_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q) : Q| = |C_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q) : Q \cap C_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q)| = |C_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q) : Z(Q)|$$

folgt auch, dass $Z(Q)$ die eindeutig bestimmte p -Sylowgruppe von $C_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q)$ ist. \square

Korollar 3.5.2. *Es seien D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, welcher zum Block B vom p -Gewicht $w > 0$ von $F\mathfrak{S}_n$ gehört. Dann ist D nicht relativ \mathfrak{S}_{pw-1} -projektiv.*

Beweis. Wir nehmen an, der Modul D ist relativ \mathfrak{S}_{pw-1} -projektiv. Dann ist er aber sogar relativ \mathfrak{S}_{pw-p} -projektiv. Es existieren also ein $R \in \text{Syl}_p(\mathfrak{S}_{p(w-1)})$ und ein Vertex Q von D mit $Q \leq R$. Dann liegt jedoch der p -Zyklus $(p(w-1)+1, \dots, pw)$ in $C_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q) \setminus Q$, im Widerspruch zu obigem Lemma. Folglich ist D nicht relativ \mathfrak{S}_{pw-1} -projektiv. \square

Bemerkung 3.5.3. Es gelten die Voraussetzungen des vorigen Korollars. Außerdem seien Q ein Vertex von D und R eine Defektgruppe von B mit $Q \leq R \leq \mathfrak{S}_{pw}$. Der Beweis von Lemma 3.5.1 zeigt, dass dann automatisch $C_R(Q) \leq Q$ gelten muss. Es ist nämlich $C_R(Q)$ eine p -Untergruppe von $C_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q)$ und damit in der einzigen p -Sylowgruppe $Z(Q)$ von $C_{\mathfrak{S}_{pw}}(Q)$ enthalten. Folglich ist sogar $C_R(Q) = Z(Q)$.

Teil II

Vertizes von $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln

Kapitel 4

Irreduzible Moduln symmetrischer Gruppen

4.1 Restriktion und Induktion irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln

In diesem Abschnitt seien

- F ein Körper der Charakteristik $p > 0$
- $n \in \mathbb{N}^*$
- $I := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, \dots, p-1\}$
- \bar{z} die Restklasse von $z \in \mathbb{Z}$ modulo p .

Im Folgenden werden wir einen Überblick über die **modularen Branching-Regeln** von A. Kleshchev geben. Diese sind Analoga zu den gewöhnlichen Branching-Regeln aus Satz 3.3.5 und werden eines der wichtigsten Werkzeuge für unsere Vertexberechnungen sein.

Bemerkung/Definition 4.1.1. Es seien $\lambda \in \mathcal{P}_n$ und $i \in I$.

(i) Ein Knoten (r, s) des Young-Diagramms $[\lambda]$ heißt ***i-entfernbar***, falls gilt

- $\overline{(r, s)} = \overline{s - r} = i$
- $[\lambda] \setminus \{(r, s)\}$ ist das Young-Diagramm einer Partition von $n - 1$.

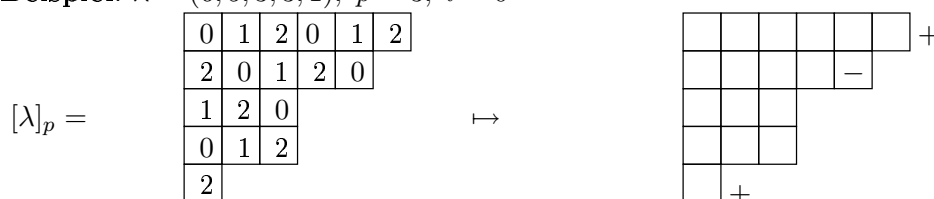
Ein Knoten $(r, s) \notin [\lambda]$ heißt ***i-hinzufügbar***, falls gilt

- $\overline{(r, s)} = \overline{s - r} = i$
- $[\lambda] \cup \{(r, s)\}$ ist das Young-Diagramm einer Partition von $n + 1$.

(ii) Wir versehen für jedes $i \in I$ alle *i-entfernbar*en Knoten von $[\lambda]$ mit einem „–“ und alle *i-hinzufügbar*en Knoten mit einem „+“.

(iii) Die ***i-Signatur*** von λ ist die Folge von Plus- und Minuszeichen, die man erhält, wenn man von links unten nach rechts oben die Vorzeichen entlang des Randes von $[\lambda]$ liest. Sind λ eine p -reguläre Partition und D^λ der entsprechende irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, so sprechen wir auch von der ***i-Signatur*** des Moduls D^λ .

Beispiel: $\lambda = (6, 5, 3, 3, 1)$, $p = 3$, $i = 0$



Die *i*-Signatur von λ ist also $+ - +$.

- (iv) Aus der i -Signatur erhält man die **reduzierte i -Signatur** von λ durch wiederholtes Streichen aller Terme der Form $-+$. Die reduzierte i -Signatur hat somit stets die Form $+\dots+ -\dots-$. In obigem Beispiel ist die reduzierte 0-Signatur also $+$. Im Fall, dass λ eine p -reguläre Partition ist, sprechen wir auch hier von der **reduzierten i -Signatur** des irreduziblen Moduls D^λ .
- (v) Ein Knoten von $[\lambda]$, der zu einem „ $-$ “ in der reduzierten i -Signatur von λ gehört, heißt **i -normal**. Ein Knoten von $[\lambda]$, der zu einem „ $+$ “ in der reduzierten i -Signatur von λ gehört, heißt **i -conormal**. Der Knoten, der zum am weitesten links stehenden „ $-$ “ gehört, heißt **i -gut**, und derjenige, der zum am weitesten rechts stehenden „ $+$ “ gehört, heißt **i -cogut**.
Beispiel: $p = 2$, $n = 9$, $\lambda = (6, 2, 1)$

$$[\lambda]_p = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & 0 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & 1 \\ \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & 1 \\ 1 \end{array}$$

Daraus erhält man die reduzierte 0-Signatur $-$ und die reduzierte 1-Signatur $+++-$. Der Knoten $(1, 6)$ ist 1-gut, $(2, 3)$ ist 1-cogut, und $(3, 1)$ ist 0-gut.

- (vi) Für $i \in I$ sei $\varepsilon_i(\lambda)$ die Anzahl der i -normalen Knoten von $[\lambda]$, d.h. die Anzahl der Minuszeichen in der reduzierten i -Signatur von λ . Ferner sei $\varphi_i(\lambda)$ die Anzahl der i -conormalen Knoten von $[\lambda]$, d.h. die Anzahl der Pluszeichen in der reduzierten i -Signatur von λ .

Mit diesen Bezeichnungen gilt der folgende Satz.

Satz 4.1.2 ([9] Thm.11.2.7, Thm. 11.2.8). *Es sei λ eine p -reguläre Partition von n mit p -Inhalt $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1})$. Dann gilt:*

- (i) $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) = M_0(\lambda) \oplus M_1(\lambda) \oplus \dots \oplus M_{p-1}(\lambda)$. Es ist $M_i(\lambda) \neq 0$ genau dann, wenn λ einen i -guten Knoten A besitzt. In diesem Fall ist $M_i(\lambda)$ ein unzerlegbarer, selbstdualer $F\mathfrak{S}_{n-1}$ -Modul mit $\text{Hd}(M_i(\lambda)) \cong \text{Soc}(M_i(\lambda)) \cong D^{\lambda_A}$, welcher im Block von $F\mathfrak{S}_{n-1}$ mit p -Inhalt $\gamma - i := (\gamma_0, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i - 1, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{p-1})$ liegt. Dabei bezeichne λ_A die zum Young-Diagramm $[\lambda] \setminus \{A\}$ gehörende p -reguläre Partition von $n - 1$.
- (ii) Für $i \in \{0, \dots, p-1\}$ ist der Modul $M_i(\lambda)$ genau dann irreduzibel, wenn $\varepsilon_i(\lambda) = 1$ ist.
- (iii) $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D^\lambda) = N_0(\lambda) \oplus N_1(\lambda) \oplus \dots \oplus N_{p-1}(\lambda)$. Es ist $N_i(\lambda) \neq 0$ genau dann, wenn λ einen i -coguten Knoten B besitzt. In diesem Fall ist $N_i(\lambda)$ ein unzerlegbarer, selbstdualer $F\mathfrak{S}_{n+1}$ -Modul mit $\text{Hd}(N_i(\lambda)) \cong \text{Soc}(N_i(\lambda)) \cong D^{\lambda^B}$, welcher im Block von $F\mathfrak{S}_{n+1}$ mit p -Inhalt $\gamma + i := (\gamma_0, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i + 1, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{p-1})$ liegt. Dabei ist λ^B die zum Young-Diagramm $[\lambda] \cup \{B\}$ gehörende p -reguläre Partition von $n + 1$.
- (iv) Für $i \in \{0, \dots, p-1\}$ ist der Modul $N_i(\lambda)$ genau dann irreduzibel, wenn $\varphi_i(\lambda) = 1$ ist.

Satz 4.1.3 ([9], Thm. 2.11). *Es seien λ eine p -reguläre Partition von n und $i \in I$. Dann gilt:*

- (i) Es sei A ein i -entfernbarer Knoten von $[\lambda]$, so dass die zu $[\mu] := [\lambda] \setminus \{A\}$ gehörende Partition μ von $n-1$ wieder p -regulär ist. Falls A auch i -normal ist, so ist dann $[M_i(\lambda) : D^\mu]$ gleich der Anzahl der i -normalen Knoten von λ rechts von A , wobei A selber mitgezählt wird. Ist A nicht i -normal, so gilt $[\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) : D^\mu] = [M_i(\lambda) : D^\mu] = 0$.
- (ii) Es sei B ein i -hinzufügbare Knoten von $[\lambda]$, so dass $[\nu] := [\lambda] \cup \{B\}$ das Diagramm einer p -regulären Partition ν von $n+1$ ist. Ist B auch i -conormal, so ist dann $[N_i(\lambda) : D^\nu]$ gleich der Anzahl der i -conormalen Knoten von λ links von B , wobei B selber mitgezählt wird. Ist B nicht i -conormal, so gilt $[\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D^\lambda) : D^\nu] = [N_i(\lambda) : D^\nu] = 0$.

Bemerkung 4.1.4. Im Folgenden werden wir einige Begriffe aus der Kategorien-Theorie benutzen, jedoch nicht näher erläutern. Für die Details verweisen wir auf [2]. In [9] und [46] werden für $i \in I, r \in \{1, \dots, n-1\}, s \in \mathbb{N}^*$ Funktoren

$$\begin{aligned} e_i &: F\mathfrak{S}_n\text{-mod} \longrightarrow F\mathfrak{S}_{n-1}\text{-mod} \\ f_i &: F\mathfrak{S}_n\text{-mod} \longrightarrow F\mathfrak{S}_{n+1}\text{-mod} \\ e_i^{(r)} &: F\mathfrak{S}_n\text{-mod} \longrightarrow F\mathfrak{S}_{n-r}\text{-mod} \\ f_i^{(s)} &: F\mathfrak{S}_n\text{-mod} \longrightarrow F\mathfrak{S}_{n+s}\text{-mod} \end{aligned}$$

eingeführt. Dabei sei $F\mathfrak{S}_n\text{-mod}$ die Kategorie der endlich erzeugten $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln. Diese Funktoren kommen folgendermaßen zustande. Es bezeichne zunächst Γ_n die Menge aller p -Tupel natürlicher Zahlen, deren Summe gleich n ist. Die Menge aller p -Inhalte, die zu den p -Blöcken von $F\mathfrak{S}_n$ gehören, ist also eine Teilmenge von Γ_n . Für jeden $F\mathfrak{S}_n$ -Modul M schreiben wir $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_n} M[\gamma]$. Dabei sei $M[\gamma]$ die Summe aller unzerlegbaren direkten Summanden von M aus dem Block mit p -Inhalt γ , falls γ ein p -Inhalt ist, und 0 sonst. Für jeden p -Inhalt γ mit $M[\gamma] \neq 0$ und alle $i \in I$ setzen wir nun mit diesen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} e_i(M[\gamma]) &:= (\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(M[\gamma]))[\gamma - i] \\ f_i(M[\gamma]) &:= (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(M[\gamma]))[\gamma + i]. \end{aligned}$$

Dabei seien wieder $\gamma - i := (\gamma_0, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i - 1, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{p-1})$ und $\gamma + i := (\gamma_0, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i + 1, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{p-1})$. Im Fall $\gamma_i = 0$ setzen wir $e_i(M[\gamma]) := 0$.

Ferner können wir den $F\mathfrak{S}_n$ -Modul $M[\gamma]$ auch als $F[\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_s]$ -Modul auffassen, auf dem $\mathfrak{S}_s = \mathfrak{S}(\{n+1, \dots, n+s\})$ trivial operiert. Andererseits betrachten wir die Menge $M[\gamma]^{\mathfrak{S}_r}$ aller Fixpunkte der Operation der Gruppe $\mathfrak{S}(\{n-r+1, \dots, n\}) \leq \mathfrak{S}_n$ auf $M[\gamma]$ und fassen diese als $F\mathfrak{S}_{n-r}$ -Modul auf. Für alle $i \in I$ gelte dann

$$\begin{aligned} e_i^{(r)}(M[\gamma]) &:= (M[\gamma]^{\mathfrak{S}_r})[\gamma - i^r] \\ f_i^{(s)}(M[\gamma]) &:= (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_s}^{\mathfrak{S}_{n+s}}(M[\gamma]))[\gamma + i^s]. \end{aligned}$$

Dabei seien $\gamma - i^r := \underbrace{\gamma - i - \dots - i}_{r\text{-mal}}$ und $\gamma + i^s := \underbrace{\gamma + i + \dots + i}_{s\text{-mal}}$. Ferner setzen wir im Fall

$\gamma_i < r$ auch hier $e_i^{(r)}(M[\gamma]) := 0$. Wir können nun $e_i, f_i, e_i^{(r)}, f_i^{(s)}$ jeweils additiv auf beliebige $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln fortsetzen und erhalten so die entsprechenden Funktoren. A.Kleshchev zeigt in [9] 11.2, dass mit obigen Bezeichnungen $M_i(\lambda) \cong e_i D^\lambda$ und $N_i(\lambda) \cong f_i D^\lambda$ für $i \in I$ gilt. Durch wiederholtes Anwenden der Funktoren e_i beziehungsweise f_i erhält man ferner

Satz 4.1.5 ([9] Thm. 11.2.10, Thm. 11.2.11). *Es seien λ eine p -reguläre Partition von n , $i \in I, r \in \{1, \dots, n-1\}$ und $s \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt*

$$(i) \quad e_i^r D^\lambda \cong \underbrace{e_i^{(r)} D^\lambda \oplus \dots \oplus e_i^{(r)} D^\lambda}_{r! \text{ Summanden}}. \text{ Dabei ist } e_i^{(r)} D^\lambda \neq 0 \text{ genau dann, wenn } [\lambda] \text{ mindestens } r$$

Knoten besitzt, die i -normal sind. In diesem Fall ist $e_i^{(r)} D^\lambda$ ein unzerlegbarer, selbstdualer Modul mit $\text{Hd}(e_i^{(r)} D^\lambda) \cong \text{Soc}(e_i^{(r)} D^\lambda) \cong D^\alpha$, wobei $[\alpha]$ aus $[\lambda]$ durch Streichen der r untersten i -normalen Knoten entsteht.

(ii) *Der Modul $e_i^{(r)} D^\lambda$ ist genau dann irreduzibel, wenn $r = \varepsilon_i(\lambda)$ ist.*

$$(iii) \quad f_i^s D^\lambda \cong \underbrace{f_i^{(s)} D^\lambda \oplus \dots \oplus f_i^{(s)} D^\lambda}_{s! \text{ Summanden}}. \text{ Dabei ist } f_i^{(s)} D^\lambda \neq 0 \text{ genau dann, wenn } [\lambda] \text{ mindestens } s$$

Knoten besitzt, die i -conormal sind. In diesem Fall ist $f_i^{(s)} D^\lambda$ ein unzerlegbarer, selbstdualer Modul mit $\text{Hd}(f_i^{(s)} D^\lambda) \cong \text{Soc}(f_i^{(s)} D^\lambda) \cong D^\beta$, wobei $[\beta]$ aus $[\lambda]$ durch Hinzufügen der s obersten i -conormalen Knoten entsteht.

(iv) Der Modul $f_i^{(s)} D^\lambda$ ist genau dann irreduzibel, wenn $s = \varphi_i(\lambda)$ ist.

Bemerkung/Korollar 4.1.6. Es sei D^λ ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul mit $\varepsilon_i := \varepsilon_i(\lambda)$ und $\varphi_i := \varphi_i(\lambda)$ für ein $i \in I$. Ferner seien α die p -reguläre Partition von $n - \varepsilon_i$, die durch Streichen der i -normalen Knoten von $[\lambda]$ entsteht, und β die p -reguläre Partition von $n + \varphi_i$, die durch Hinzufügen der i -conormalen Knoten zu $[\lambda]$ entsteht. Nach obigem Satz besitzt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-\varepsilon_i}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ genau $\varepsilon_i!$ zum irreduziblen Modul D^α isomorphe direkte Summanden, und $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+\varphi_i}}(D^\lambda)$ besitzt genau $\varphi_i!$ zum irreduziblen Modul D^β isomorphe direkte Summanden. Für die Vertizes der entsprechenden Moduln gilt daher: $\text{vx}(D^\alpha) \leq_{\mathfrak{S}_n} \text{vx}(D^\lambda)$ und $\text{vx}(D^\beta) \leq_{\mathfrak{S}_{n+\varphi_i}} \text{vx}(D^\lambda)$. Ist außerdem $\varphi_i(\alpha) = \varepsilon_i$ und $f_i^{(\varepsilon_i)}(D^\alpha) \cong D^\lambda$ oder $\varepsilon_i(\beta) = \varphi_i$ und $e_i^{(\varphi_i)}(D^\beta) \cong D^\lambda$, so folgt $\text{vx}(D^\alpha) \sim_{\mathfrak{S}_n} \text{vx}(D^\lambda)$ beziehungsweise $\text{vx}(D^\beta) \sim_{\mathfrak{S}_{n+\varphi_i}} \text{vx}(D^\lambda)$. Gegebenenfalls werden wir dann auch die Notation $\alpha \longleftrightarrow \lambda$ beziehungsweise $\lambda \longleftrightarrow \beta$ verwenden.

4.2 Die Scopes-Äquivalenz und Blöcke von bestimmtem Gewicht

Es sei F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$. In [65] zeigt J.Scopes, dass man die Blöcke symmetrischer Gruppen von einem bestimmten p -Gewicht $w > 0$ in Familien unterteilen kann, abhängig von den entsprechenden p -Kernen. Jede solche Familie besteht aus Morita-äquivalenten Blöcken, und man kennt eine obere Schranke für die Anzahl dieser Familien. Um zu erkennen, wann zwei Blöcke vom p -Gewicht w Morita-äquivalent sind, benötigen wir die in Kapitel 3 eingeführten Abaki und deren Eigenschaften.

Wir betrachten dazu einen Block B von $F\mathfrak{S}_n$ mit p -Kern $\kappa := (\kappa_1, \dots, \kappa_r)$ und p -Gewicht w . Dabei gelte $\kappa_r > 0$. Dann setzen wir $t := pw + r$ und stellen $\beta_t(\kappa)$ auf einem Abakus mit p Läufern dar. Ferner nehmen wir an, dass ein $k \geq w$ und ein $i \in \{1, \dots, p-1\}$ existieren, so dass die Anzahl der Perlen auf dem i -ten Läufer des Abakus die Anzahl der Perlen auf dem $(i-1)$ -ten Läufer um genau k übersteigt. Wir verschieben jede der k untersten Perlen des i -ten Läufers um eine Position nach links auf den $(i-1)$ -ten Läufer. Das entspricht dem Vertauschen der beiden Läufer. Auf diese Weise erhalten wir die Abakus-Darstellung einer neuen Partition $\bar{\kappa}$, die wiederum ein p -Kern ist. Den Block mit p -Kern $\bar{\kappa}$ und p -Gewicht w bezeichnen wir mit \bar{B} und sagen, dass B und \bar{B} ein $[w : k]$ -**Paar** bilden. Ferner bezeichnen wir B und \bar{B} auch als **Scopes-äquivalente** Blöcke.

Die Scopes-Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt der folgende Satz.

Satz 4.2.1 ([65]). *Die beiden Blöcke B und \bar{B} sind Morita-äquivalent. Diese Morita-Äquivalenz induziert ferner eine Bijektion Φ zwischen den Isomorphieklassen irreduzibler Moduln in B und den Isomorphieklassen irreduzibler Moduln \bar{B} , welche die lexikographische Ordnung der entsprechenden Partitionen erhält.*

Bemerkung 4.2.2. (a) Die Bijektion Φ zwischen den Isomorphieklassen irreduzibler Moduln in B und \bar{B} lässt sich folgendermaßen beschreiben. Für D^λ aus B stellen wir $\beta_t(\lambda)$ mit $t := pw + r$ auf einem Abakus mit p Läufern dar. Dann hat auch dieser Abakus auf dem i -ten Läufer k Perlen mehr als auf dem $(i-1)$ -ten. Insbesondere gilt dabei, dass in den Zeilen des Abakus, in denen sich auf dem $(i-1)$ -ten Läufer eine Perle befindet, auch der i -te Läufer eine Perle besitzt. Wir verschieben die untersten k Perlen des i -ten Läufers um eine Position nach links auf den $(i-1)$ -ten Läufer. Die p -reguläre Partition, die zu der so entstandenen Abakus-Darstellung gehört, sei $\bar{\lambda}$. Dann liegt $D^{\bar{\lambda}}$ in \bar{B} , und wir setzen $\Phi(D^\lambda) := D^{\bar{\lambda}}$. Auf diese Weise erhalten wir die Bijektion Φ . Einen ausführlichen Beweis hierfür findet man in [65].

(b) **Beispiel:** Wir betrachten den Fall $p = 3$, $w = 2$. Ferner sei B der Block von $F\mathfrak{S}_{12}$ mit 3-Kern $\kappa := (4, 2)$ und 3-Gewicht 2. Für $t = 3w + 2 = 8$ erhalten wir also die β -Folge $\beta_t(\kappa) = (11, 8, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$. Der entsprechende Abakus hat auf Läufer 2 genau zwei Perlen mehr als auf Läufer 1. Verschieben wir diese nach links auf Läufer 1, so erhalten

The diagram illustrates two sets of three vertical lines, each representing a qubit. The left set has two horizontal lines at the bottom, and the right set has one horizontal line at the bottom. Each vertical line has two black dots representing qubits.

$$\begin{aligned}\Phi(D^{(10,2)}) &= D^{(9,1)}, & \Phi(D^{(7,5)}) &= D^{(6,4)}, & \Phi(D^{(7,2^2,1)}) &= D^{(6,2^2)}, \\ \Phi(D^{(4^2,3,1)}) &= D^{(4^2,2)}, & \Phi(D^{(4,3^2,1^2)}) &= D^{(3^2,2,1^2)}.\end{aligned}$$

(c) Die Bijektion Φ lässt sich mit Hilfe der in Abschnitt 4.1 eingeführten Funktoren noch präziser beschreiben. Dazu setzen wir ab jetzt wieder $I := \{0, \dots, p-1\}$ und bemerken zunächst, dass Folgendes gilt:

Beweis. Es sei D^λ ein irreduzibler Modul aus dem Block B . Da λ nach Voraussetzung den p -Inhalt $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1})$ hat, hat der p -Kern κ von λ nach Satz 3.2.10 den p -Inhalt $\tilde{\gamma} = (\gamma_0 - w, \dots, \gamma_{p-1} - w)$. Nach Lemma 3.2.9 existiert ein $j \in I$, so dass $[\bar{\kappa}]$ aus $[\kappa]$ durch Entfernen von k Knoten mit p -Rest j entsteht. Dabei sei $\bar{\kappa}$ der p -Kern von $\bar{\lambda}$. Also hat $\bar{\kappa}$ den p -Inhalt $(\gamma_0 - w, \dots, \gamma_{j-1} - w, \gamma_j - w - k, \gamma_{j+1} - w, \dots, \gamma_{p-1} - w)$. Schließlich hat $\bar{\lambda}$ den p -Inhalt $(\gamma_0, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma_j - k, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_{p-1}) = \gamma - j^k$, woraus die Behauptung folgt. \square

Lemma 4.2.4. *Es seien B und \overline{B} Scopes-äquivalente Blöcke von $F\mathfrak{S}_n$ beziehungsweise $F\mathfrak{S}_{n-k}$ mit p -Gewicht $w > 0$, welche ein $[w : k]$ -Paar bilden für ein $k \geq w$. Ferner bezeichne Φ die entsprechende Bijektion zwischen den Isomorphieklassen irreduzibler Moduln aus B und \overline{B} . Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $j \in I$ mit*

$$\begin{aligned} D^{\bar{\lambda}} &:= \Phi(D^\lambda) \cong e_j^{(k)}(D^\lambda) \\ D^\lambda &\cong f_j^{(k)}(\Phi(D^\lambda)) \\ k &= \varepsilon_j(\lambda) = \varphi_j(\bar{\lambda}) \end{aligned}$$

Beweis. Es sei λ eine p -reguläre Partition von n , so dass D^λ in B liegt. Es bezeichne $\bar{\lambda}$ wieder die zu $\Phi(D^\lambda)$ gehörende Partition von $n - k$. Ferner habe B den p -Inhalt $\gamma := (\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1})$. Wir schreiben nun $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-k}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) = X_1 \oplus \dots \oplus X_m$ mit unzerlegbaren Moduln X_1, \dots, X_m für ein $m \in \mathbb{N}^*$. Dabei können wir nach [65], L. 2.4 annehmen, dass X_1, \dots, X_{m_1} aus dem Block \bar{B} kommen für ein $m_1 \in \{1, \dots, m\}$. Nach [65] (Beweis zu Cor. 3.3) ist dann

$$m_1 = k! \text{ und } X_1 \cong \dots \cong X_{m_1} \cong D^{\bar{\lambda}}.$$

Nach Satz 4.1.5 und obigem Lemma ist andererseits

$$X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m_1} \cong e_j^k(D^\lambda)$$

für genau ein $j \in I$. Demnach muss also

$$k = \varepsilon_j(\lambda) \text{ und } X_1 \cong \cdots \cong X_{m_1} \cong e_j^{(k)}(D^\lambda)$$

gelten.

Umgekehrt betrachten wir $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-k}}^{\mathfrak{S}_n}(D^{\bar{\lambda}}) = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_l$ mit unzerlegbaren Moduln Y_1, \dots, Y_l für ein $l \in \mathbb{N}^*$. Wir können nach [65], L. 2.4 annehmen, dass Y_1, \dots, Y_{l_1} im Block B liegen für ein $l_1 \in \{1, \dots, l\}$. Nach [65] (Beweis zu Cor. 3.3) ist

$$l_1 = k! \text{ und } Y_1 \cong \cdots \cong Y_{l_1} \cong D^\lambda.$$

Nach Satz 4.1.5 und dem obigem Lemma gilt aber auch

$$Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_{l_1} \cong f_j^k(D^{\bar{\lambda}}).$$

Folglich ist

$$k = \varphi_j(\bar{\lambda}) \text{ und } D^\lambda \cong f_j^{(k)}(D^{\bar{\lambda}}).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Bemerkung 4.2.5. (a) Wiederholtes Anwenden des obigen Lemmas zeigt auch, dass die einander entsprechenden irreduziblen Moduln zweier Scopes-äquivalenter Blöcke stets einen gemeinsamen Vertex sowie eine gemeinsame Quelle besitzen.

(b) Im Fall $p = 2$ sind die 2-Kerne genau die sogenannten Dreieckspartitionen, d.h. Partitionen der Form $\kappa_a := (a, a-1, a-2, \dots, 1, 0)$ für $a \geq 0$. Ferner gilt

Satz 4.2.6 ([70], Satz 4.4.2). *Im Fall $p = 2$ sind die p -Blöcke von einem festen p -Gewicht $w > 0$, welche den p -Kernen κ_a mit $a \geq w-1$ entsprechen, alle Scopes-äquivalent.*

Bemerkung 4.2.7. (a) Wir betrachten wieder ein festes $w > 0$ und $p = 2$. Um die Vertizes der irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen in p -Blöcken mit p -Gewicht w zu bestimmen, genügt es also, dies für die irreduziblen Moduln in p -Blöcken mit p -Gewicht w und p -Kern κ_a mit $a = 0, 1, \dots, w-1$ zu tun.

(b) In [70] wurden bereits die Vertizes der irreduziblen Moduln in Blöcken vom 2-Gewicht $w = 0, 1, 2, 3$ bestimmt. Wir werden nun die Blöcke vom 2-Gewicht 4 betrachten. Nach der obigen Überlegung beginnt hier der allgemeine Fall bei $n = 14$.

Satz 4.2.8. *Es seien $p = 2$, $n \in \mathbb{N}^*$ und B ein Block von $F\mathfrak{S}_n$ vom Gewicht 4. Dann enthält B genau fünf irreduzible Moduln. Diese sind:*

(i) im Fall $n = 8$

- (a) $D^{(8)}$ mit $\text{vx}(D^{(8)}) \sim_{\mathfrak{S}_8} P_8$
- (b) $D^{(7,1)}$ mit $\text{vx}(D^{(7,1)}) \sim_{\mathfrak{S}_8} P_8$
- (c) $D^{(6,2)}$ mit $\text{vx}(D^{(6,2)}) \sim_{\mathfrak{S}_8} P_8$
- (d) $D^{(5,3)}$ mit $\text{vx}(D^{(5,3)}) \sim_{\mathfrak{S}_8} Q_8$
- (e) $D^{(4,3,1)}$ mit $\text{vx}(D^{(4,3,1)}) \sim_{\mathfrak{S}_8} Q_8$.

(ii) im Fall $n = 9$

- (a) $D^{(9)}$ mit $\text{vx}(D^{(9)}) \sim_{\mathfrak{S}_9} P_8$.

- (b) $D^{(7,2)}$ mit $\text{vx}(D^{(7,2)}) \sim_{\mathfrak{S}_9} P_8$.
- (c) $D^{(6,2,1)}$ mit $\text{vx}(D^{(6,2,1)}) \sim_{\mathfrak{S}_9} P_8$.
- (d) $D^{(5,4)}$ mit $\text{vx}(D^{(5,4)}) \sim_{\mathfrak{S}_9} Q_8$.
- (e) $D^{(5,3,1)}$ mit $\text{vx}(D^{(5,3,1)}) \sim_{\mathfrak{S}_9} Q_8$.

(iii) im Fall $n = 11$

- (a) $D^{(10,1)}$ mit $\text{vx}(D^{(10,1)}) \sim_{\mathfrak{S}_{11}} P_8$.
- (b) $D^{(8,3)}$ mit $\text{vx}(D^{(8,3)}) \sim_{\mathfrak{S}_{11}} P_8$.
- (c) $D^{(6,5)}$ mit $\text{vx}(D^{(6,5)}) \sim_{\mathfrak{S}_{11}} Q_8$.
- (d) $D^{(6,3,2)}$ mit $\text{vx}(D^{(6,3,2)}) \sim_{\mathfrak{S}_{11}} P_4 \times Q_4$.
- (e) $D^{(5,3,2,1)}$ mit $\text{vx}(D^{(5,3,2,1)}) \sim_{\mathfrak{S}_{11}} Q_8$.

(iv) im Fall $n \geq 14$ für passendes $a \in \mathbb{N}^*$

- (a) $D^{(a+8,a-1,a-2,\dots,0)}$ mit $\text{vx}(D^{(a+8,a-1,a-2,\dots,0)}) \sim_{\mathfrak{S}_n} P_8$.
- (b) $D^{(a+6,a+1,a-2,a-3,\dots,0)}$ mit $\text{vx}(D^{(a+6,a+1,a-2,a-3,\dots,0)}) \sim_{\mathfrak{S}_n} P_8$.
- (c) $D^{(a+4,a+3,a-2,a-3,\dots,0)}$ mit $\text{vx}(D^{(a+4,a+3,a-2,a-3,\dots,0)}) \sim_{\mathfrak{S}_n} Q_8$.
- (d) $D^{(a+4,a+1,a,a-3,a-4,\dots,0)}$ mit $\text{vx}(D^{(a+4,a+1,a,a-3,a-4,\dots,0)}) \sim_{\mathfrak{S}_n} P_4 \times Q_4$.
- (e) $D^{(a+2,a+1,a,a-1,a-4,\dots,0)}$ mit $\text{vx}(D^{(a+2,a+1,a,a-1,a-4,\dots,0)}) \sim_{\mathfrak{S}_n} E_8$.

Dabei ist E_8 eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 8, die regulär auf den Zahlen $1, \dots, 8$ operiert.

Terme der Form $a - i < 0$ werden immer als 0 interpretiert.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass wir die Parameter der irreduziblen Moduln für $n \geq 14$ induktiv erhalten. Im Fall $n = 14$ ist $a = 3$, und die Partitionen zu den irreduziblen Moduln im Block mit 2-Kern κ_3 haben genau die oben angegebene Form.

Wir nehmen nun für $a \geq 3$ an, dass wir die Parameter der irreduziblen Moduln im 2-Block \overline{B} von $F\mathfrak{S}_n$ mit 2-Gewicht 4 und 2-Kern κ_a bereits kennen. Um die Parameter der irreduziblen Moduln im Block B von $F\mathfrak{S}_{n+a+1}$ mit 2-Gewicht 4 und 2-Kern κ_{a+1} zu bestimmen, müssen wir nach Bemerkung 4.2.2 folgendermaßen vorgehen: Wir betrachten alle Partitionen $\bar{\lambda}$ von n , die zu den irreduziblen Moduln in \overline{B} gehören, und stellen $\beta_t(\bar{\lambda})$ mit $t := 8 + a + 1$ jeweils auf einem Abakus mit zwei Läufern dar. Dieser besitzt dann auf dem 0-ten Läufer $a + 1$ Perlen mehr als auf dem ersten. Diese verschieben wir um eine Position nach rechts auf den ersten Läufer. Das liefert dann die 2-reguläre Partition λ von $n + a + 1$ mit $\Phi(D^\lambda) = D^{\bar{\lambda}}$. Dieses Verschieben der $a + 1$ Perlen von Läufer 0 auf Läufer 1 entspricht im Fall $a \equiv 1 \pmod{2}$ dem Hinzufügen aller 1-conormalen Knoten zu $[\bar{\lambda}]$ und im Fall $a \equiv 0 \pmod{2}$ dem Hinzufügen aller 0-conormalen Knoten zu $[\bar{\lambda}]$. Wir erhalten somit für $a = 3$:

$\bar{\lambda}$	λ
(11, 2, 1)	(12, 3, 2, 1) = $(a + 1 + 8, a + 1 - 1, a + 1 - 2, a + 1 - 3, 0)$
(9, 4, 1)	(10, 5, 2, 1) = $(a + 1 + 6, a + 1 + 1, a + 1 - 2, a + 1 - 3, 0)$
(7, 6, 1)	(8, 7, 2, 1) = $(a + 1 + 4, a + 1 + 3, a + 1 - 2, a + 1 - 3, 0)$
(7, 4, 3)	(8, 5, 4, 1) = $(a + 1 + 4, a + 1 + 1, a + 1, a + 1 - 3, 0)$
(5, 4, 3, 2)	(6, 5, 4, 3) = $(a + 1 + 2, a + 1 + 1, a + 1, a + 1 - 1, 0)$

Im Fall $a > 3$ ist stets $\bar{\lambda}_i \equiv \bar{\lambda}_{i+1} \pmod{2}$ für alle $i \in \mathbb{N}^*$ mit $\bar{\lambda}_{i+1} > 0$. Hat $\bar{\lambda}$ also k von 0 verschiedene Teile, so sind die conormalen Knoten genau die Knoten $(i, \bar{\lambda}_i + 1)$ und $(k + 1, 1)$ für $i \in \{1, \dots, k\}$. Diese haben alle denselben p -Rest. Demzufolge erhalten wir für $a > 3$:

$\bar{\lambda}$	λ
$(a+8, a-1, a-2, \dots, 0)$	$(a+9, a, a-1, a-2, \dots, 0)$
$(a+6, a+1, a-2, a-3, \dots, 0)$	$(a+7, a+2, a-1, a-2, \dots, 0)$
$(a+4, a+3, a-2, a-3, \dots, 0)$	$(a+5, a+4, a-1, a-2, \dots, 0)$
$(a+4, a+1, a, a-3, a-4, \dots, 0)$	$(a+5, a+2, a+1, a-2, a-3, \dots, 0)$
$(a+2, a+1, a, a-1, a-4, \dots, 0)$	$(a+3, a+2, a+1, a, a-3, \dots, 0)$

Für $n = 8, 9, 11, 14$ gehen die Aussagen über die Vertices aus den Computerberechnungen hervor. Nach den Bemerkungen 4.2.6 und 4.2.5 folgt daraus die Behauptung für $n > 14$. \square

4.3 Die Feit-Vermutung für symmetrische Gruppen

Die Feit-Vermutung besagt Folgendes: Sind F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$ und Q eine p -Gruppe, so existieren bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare FQ -Moduln, welche Quellen irreduzibler FG -Moduln mit Vertex Q für eine Gruppe $G \supseteq Q$ sind.

Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, dass es für ein festes $w \in \mathbb{N}^*$ bis auf Scopes-Äquivalenz nur endlich viele Blöcke symmetrischer Gruppen von positivem p -Gewicht $\leq w$ gibt. Ferner enthält jeder Block bis auf Isomorphie nur endlich viele irreduzible Moduln, und die einander entsprechenden irreduziblen Moduln zweier Scopes-äquivalenter Blöcke haben stets einen gemeinsamen Vertex sowie eine gemeinsame Quelle. Irreduzible Moduln in Blöcken vom Gewicht 0 sind projektiv, haben also Vertex $\{1\}$ und triviale Quelle.

In [63] behauptet L. Puig, dass für $n \in \mathbb{N}^*$ und jede Defektgruppe P eines Blocks von $F\mathfrak{S}_n$, welcher einen irreduziblen Modul mit Vertex Q enthält, stets $|P| \leq |Z(Q)|!$ gilt. Dies hätte zur Folge, dass irreduzible Moduln symmetrischer Gruppen mit Vertex Q nur in Blöcken vom Gewicht $\leq c(|Q|)$ liegen können, wobei $c(|Q|)$ eine von $|Q|$ abhängige Konstante ist. Diese Ungleichung gilt jedoch im Allgemeinen nicht. Sind zum Beispiel $Q := P := P_{p^2}$ und B der Hauptblock von $F\mathfrak{S}_{p^2}$, so ist einerseits P eine Defektgruppe von B . Andererseits enthält B aber auch den trivialen $F\mathfrak{S}_{p^2}$ -Modul, welcher Vertex $Q = P$ hat, und es gilt $|P| = p^{p+1} \not\leq p! = |Z(Q)|!$.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass solch eine Konstante $c(|Q|)$ dennoch stets existiert. Zusammen mit obigen Überlegungen folgt daraus dann, dass die Feit-Vermutung für symmetrische Gruppen gilt.

Dazu seien ab jetzt wieder $n \in \mathbb{N}^*$ und F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$.

Satz 4.3.1. *Es seien D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul mit Vertex Q und $|Q| = p^l$ für ein $l \in \mathbb{N}^*$. Ferner besitze Q genau k nichttriviale Bahnen auf $\{1, \dots, n\}$. Dann gilt:*

- (i) *Es ist $k \leq l$, und D liegt in einem Block vom Gewicht $w \leq lp^{l-1}$.*
- (ii) *Im Fall $k = l$ liegt D in einem Block vom Gewicht l , und alle nichttrivialen Bahnen von Q haben Länge p . Insbesondere ist dann $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} (P_p)^l$.*
- (iii) *Im Fall $l \geq 2$ und $k = l - 1$ liegt D in einem Block vom Gewicht $p + l - 2$. Ferner besitzt Q dann genau eine Bahn der Länge p^2 und $l - 2$ Bahnen der Länge p .*
- (iv) *Im Fall $l \geq 3$ und $k \leq l - 2$ liegt D in einem Block vom Gewicht $w \leq (l - 2)p^{l-1}$.*

Beweis. Der Vertex Q von D hat nach Voraussetzung genau k nichttriviale Bahnen B_1, \dots, B_k auf $\{1, \dots, n\}$. Dann ist also $|\bigcup_{i=1}^k B_i| = pw$, wobei w das Gewicht des Blocks von D ist, und wir können somit

$$Q \leq \mathfrak{S}(B_1) \times \dots \times \mathfrak{S}(B_k) \leq \mathfrak{S}_{pw}$$

annehmen. Demzufolge existieren eine p -Sylowgruppe R von $\mathfrak{S}(B_1) \times \dots \times \mathfrak{S}(B_k)$ sowie eine p -Sylowgruppe S von \mathfrak{S}_{pw} mit $Q \leq R \leq S$. Genauer ist $R = R_1 \times \dots \times R_k$ mit $R_i \in \text{Syl}_p(\mathfrak{S}(B_i))$

für $i = 1, \dots, k$, und wir können $S = P_{pw}$ annehmen. Nach Bemerkung 3.5.3 gilt mit diesen Bezeichnungen $C_S(Q) = Z(Q) \leq Q$ und damit auch $Z(R) = Z(R_1) \times \dots \times Z(R_k) \leq C_S(Q) \leq Q$. Folglich ist $p^k = |Z(R)| \leq |Q| = p^l$ und $pw = |\bigcup_{i=1}^k B_i| \leq |Q|k \leq |Q|l = lp^l$. Damit erhalten wir (i). Außerdem hat im Fall $k = l$ jede der Bahnen B_1, \dots, B_l Länge p . Andernfalls hätten wir dann nämlich den Widerspruch $Q = Z(R) < C_R(Q) \leq C_S(Q)$. Somit folgt (ii).

Wir nehmen nun $k = l - 1 \geq 1$ an. Dann ist also

$$Z(R_1) \times \dots \times Z(R_{l-1}) \leq C_{R_1}(Q) \times \dots \times C_{R_{l-1}}(Q) \leq Z(Q) \leq Q \leq R_1 \times \dots \times R_{l-1},$$

woraus $|Z(Q)| \geq |Z(R_1)| \cdots |Z(R_{l-1})| = p^{l-1}$ und somit $|Q : Z(Q)| \in \{1, p\}$ folgt. Daher ist Q abelsch. Für $i = 1, \dots, l - 1$ sei ferner $z_i \in Z(R_i)$ mit $Z(R_i) = \langle z_i \rangle$. Dann existiert ein $x \in Q$ mit $Q = \langle z_1, \dots, z_{l-1}, x \rangle$. Wir schreiben nun $x = x_1 \cdots x_{l-1}$ mit $x_i \in R_i$ für $i = 1, \dots, l - 1$. Insbesondere ist also $x_i \in C_{R_i}(Q)$ für alle $i = 1, \dots, l - 1$.

Wegen $|Q| = p^l$ existiert höchstens ein $i \in \{1, \dots, l - 1\}$ mit $|C_{R_i}(Q)| \geq p^2$. Wir können daher $|C_{R_i}(Q)| = p$ für $i = 2, \dots, l - 1$ annehmen. Somit ist dann $C_{R_i}(Q) = Z(R_i)$ und insbesondere $x_i \in Z(R_i)$ für $i = 2, \dots, l - 1$. Daher gilt $Q = \langle z_1, x_1 \rangle \times Z(R_2) \times \dots \times Z(R_{l-1})$, so dass $R_i = C_{R_i}(Q) \leq Q$ und $R_i = Z(R_i)$ für $i = 2, \dots, l - 1$ folgt. Also ist $R_i \in \text{Syl}_p(\mathfrak{S}(B_i))$ abelsch, und wir erhalten $|B_i| = p$ für $i = 2, \dots, l - 1$. Ferner ist $\langle z_1, x_1 \rangle$ eine abelsche Untergruppe der Ordnung p^2 von $\mathfrak{S}(B_1)$. Folglich ist $|B_1| = p^2$, und $\langle z_1, x_1 \rangle$ operiert regulär auf B_1 . Damit ist auch $pw = |\bigcup_{i=1}^k B_i| = p^2 + (l - 2)p$ und $w = p + l - 2$ gezeigt.

Ist schließlich $1 \leq k \leq l - 2$, so erhalten wir $pw = |\bigcup_{i=1}^k B_i| \leq (l - 2)p^l$ und $w \leq (l - 2)p^{l-1}$. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Wir werden nun mit Hilfe der obigen Abschätzungen die Gruppen der Ordnungen $\leq p^3$ bestimmen, welche als Vertizes irreduzibler Moduln symmetrischer Gruppen in Frage kommen.

Lemma 4.3.2. *Es seien $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, Q eine Gruppe der Ordnung p^l und D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, welcher in einem Block mit Gewicht w liegt und Vertex Q hat. Dann gilt:*

- (i) *Im Fall $l = 0$ ist $Q = 1$, und D ist ein projektiver $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, liegt also in einem Block vom Gewicht 0.*
- (ii) *Im Fall $l = 1$ ist $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} P_p$. Ferner ist $w = 1$.*
- (iii) *Im Fall $l = 2$ ist*
 - *$Q \sim_{\mathfrak{S}_n} P_p \times P_p$ und $w = 2$ oder*
 - *$Q \sim_{\mathfrak{S}_n} E_{p^2}$ und $w = p$. Dabei bezeichne E_{p^2} eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^2 , welche regulär auf $\{1, \dots, p^2\}$ operiert.*
- (iv) *Im Fall $l = 3$ liegt einer der folgenden Fälle vor:*
 - *$Q \sim_{\mathfrak{S}_n} (P_p)^3$ und $w = 3$.*
 - *$Q \sim_{\mathfrak{S}_n} \langle (1, \dots, p^2) \rangle \times \langle (p^2 + 1, \dots, p^2 + p) \rangle$ und $w = p + 1$.*
 - *$Q \sim_{\mathfrak{S}_n} E_{p^2} \times \langle (p^2 + 1, \dots, p^2 + p) \rangle$ und $w = p + 1$.*
 - *$Q = P_4$, $p = 2$ und $w = 2$.*
 - *$Q \sim_{\mathfrak{S}_n} \langle x, y, z \rangle$, $p > 2$ und $w = p$. Dabei seien $z = (1, \dots, p) \cdots (p^2 - p + 1, \dots, p^2)$, $y = (1, 1 + p, \dots, 1 + (p - 1)p) \cdots (p, 2p, \dots, p^2)$ sowie $x \in P_{p^2}$ mit $x^p = 1$ und $zy = xyx^{-1}$.
In dem Fall ist Q also extraspeziell mit $\exp_p(Q) = p$.*
 - *$Q \sim_{\mathfrak{S}_n} \langle x, y \rangle$, $p > 2$ und $w = p$. Dabei seien $x = (1, 1 + p, \dots, 1 + (p - 1)p, 2, 2 + p, \dots, 2 + (p - 1)p, \dots, p, 2p, \dots, p^2)$ sowie $y \in P_{p^2}$ mit der Eigenschaft $y^p = 1$ und $xyx^{-1} = (1, \dots, p) \cdots (p^2 - p + 1, \dots, p^2)x$.
In dem Fall ist Q also extraspeziell mit $\exp_p(Q) = p^2$.*

- $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} E_{p^3}$ und $w = p^2$, wobei E_{p^3} eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^3 ist, welche regulär auf $\{1, \dots, p^3\}$ operiert.
- $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} \langle c, (1, p+1, \dots, 1+(p-1)p) \cdots (p^3-p^2+1, p^3-p^2+p+1, \dots, p^3) \rangle$ und $w = p^2$. Dabei sei $c \in P_{p^3}$ ein Produkt von p Zyklen der Länge p^2 mit $c^p = (1, \dots, p) \cdots (p^3-p+1, \dots, p^3)$ und $c(1, p+1, \dots, 1+(p-1)p) \cdots (p^3-p^2+1, p^3-p^2+p+1, \dots, p^3) = (1, p+1, \dots, 1+(p-1)p) \cdots (p^3-p^2+1, p^3-p^2+p+1, \dots, p^3)c$.

Beweis. Die Aussage (i) ist klar. Wir können daher ab jetzt $l \geq 1$ annehmen. Sind B_1, \dots, B_k die nichttrivialen Bahnen von Q auf $\{1, \dots, n\}$, können wir wie im Beweis von Satz 4.3.1 wieder $Q \leq R_1 \times \cdots \times R_k \leq S$ mit $S = P_{pw}$ und $R_i \in \text{Syl}_p(\mathfrak{S}(B_i))$ für $i = 1, \dots, k$ annehmen. Nach obigen Überlegungen gilt dabei insbesondere $1 \leq k \leq l$. Die Aussage (ii) gilt offenbar. Wir zeigen (iii) und (iv).

Falls $l = 2$ ist, besitzt Q entweder eine oder zwei nichttriviale Bahnen auf $\{1, \dots, n\}$. Besitzt Q zwei Bahnen B_1 und B_2 , so muss $|B_1| = |B_2| = p$, $w = 2$ und $Q = R_1 \times R_2 = P_p \times P_p$ nach Satz 4.3.1 gelten. Im Fall $p > 2$ ist dann insbesondere $Q = S$.

Ist $k = 1$, so ist also $|B_1| = p^2$, $w = p$ und $Q \leq R_1 = S = P_{p^2}$. Da Q einerseits abelsch, andererseits nach [70], S. 3.1.5 aber nicht zyklisch ist, kann Q in diesem Fall nur elementarabelsch sein und muss regulär auf $\{1, \dots, p^2\}$ operieren. Zusätzlich muss nach wie vor stets $Z(S)$ in Q enthalten sein. Bis auf Konjugation in \mathfrak{S}_{p^2} ist dann

$$E_{p^2} := \langle (1, \dots, p) \cdots (p^2 - p + 1, \dots, p^2), (1, 1 + p, \dots, 1 + (p-1)p) \cdots (p, 2p, \dots, p^2) \rangle$$

die einzige Untergruppe von P_{p^2} , welche diese Bedingungen erfüllt.

Wir betrachten nun noch den Fall $l = 3$. Dann ist also $1 \leq k \leq 3$. Falls $k = 3$ ist, so haben die drei Bahnen B_1, B_2, B_3 von Q alle Länge p nach Satz 4.3.1, und es folgt sofort $Q = R_1 \times R_2 \times R_3 = (P_p)^3$ sowie $w = 3$. Im Fall $p > 3$ ist insbesondere $Q = S$.

Im Fall $k = 2$ können wir nach Satz 4.3.1 zunächst $|B_1| = p^2$, $|B_2| = p$, $w = p+1$ und $Q \leq R_1 \times R_2 = P_{p^2} \times P_p$ annehmen. Wegen $Z(P_{p^2} \times P_p) \leq Q$ ist dann $P_p \leq Q$. Es existiert demnach also eine Untergruppe \tilde{Q} von P_{p^2} der Ordnung p^2 mit $Q = \tilde{Q} \times P_p$. Zusammen mit den Überlegungen für den Fall $l = 2$, $k = 1$ folgt daraus, dass Q in $\mathfrak{S}_{p^2} \times \mathfrak{S}_p$ und damit auch \mathfrak{S}_n entweder zu $\langle (1, \dots, p^2), (p^2+1, \dots, p^2+p) \rangle$ oder zu $E_{p^2} \times P_p$ konjugiert sein muss.

Schließlich sei $k = 1$. Dann besitzt Q also genau eine Bahn B_1 , und diese hat entweder Länge p^2 oder Länge p^3 . Wir nehmen zuerst $|B_1| = p^2$ an, so dass $Q \leq R_1 = P_{p^2}$ und $w = p$ folgt. Im Fall $p = 2$ ist insbesondere $|P_{p^2}| = 8 = p^3$, und wir erhalten $Q = P_{p^2} = P_4$. Im Fall $p > 2$ ist Q nicht abelsch. Sonst würde Q nach [35], S. I.5.13 nämlich regulär auf $\{1, \dots, p^2\}$ operieren, im Widerspruch zu $|Q| = p^3 > p^2$.

Demzufolge kann Q im Fall $p > 2$ für $k = 1$ und $|B_1| = p^2$ nur extraspeziell sein. Ist $\exp_p(Q) = p$, so ist bekanntlich

$$Q = \langle x, y, z | x^p = y^p = z^p = 1, xz = zx, yz = zy, z = xyx^{-1}y^{-1} \rangle \leq R_1 = P_{p^2}.$$

Da Q transitiv auf $\{1, \dots, p^2\}$ operiert, muss mindestens einer der Erzeuger außerhalb der Basisgruppe von P_{p^2} liegen und damit in $N_{\mathfrak{S}_{p^2}}(P_{p^2})$ zu $(1, 1+p, \dots, 1+(p-1)p) \cdots (p, 2p, \dots, p^2)$ konjugiert sein. Wir können daher zunächst annehmen, dass entweder x oder y oder z gleich $(1, 1+p, \dots, 1+(p-1)p) \cdots (p, 2p, \dots, p^2)$ ist. Aus dem Beweis von Lemma 3.1.3 wissen wir weiter, dass $C_{P_{p^2}}((1, 1+p, \dots, 1+(p-1)p) \cdots (p, 2p, \dots, p^2))$ von $(1, 1+p, \dots, 1+(p-1)p) \cdots (p, 2p, \dots, p^2)$ und $(1, \dots, p) \cdots (p^2-p+1, \dots, p^2)$ erzeugt wird. Somit folgt $z \neq (1, 1+p, \dots, 1+(p-1)p) \cdots (p, 2p, \dots, p^2)$. Wir können also $y = (1, 1+p, \dots, 1+(p-1)p) \cdots (p, 2p, \dots, p^2)$ und $z = (1, \dots, p) \cdots (p^2-p+1, \dots, p^2)$ annehmen. Man beachte, dass dann auch in der Tat

$$C_{P_{p^2}}(Q) = C_{P_{p^2}}(x) \cap C_{P_{p^2}}(y) = C_{P_{p^2}}(x) \cap \langle y, z \rangle = \langle z \rangle = Z(Q)$$

gilt. Falls $\exp_p(Q) = p^2$ ist, so ist

$$Q = \langle x, y | x^{p^2} = y^p = 1, yxy^{-1} = x^{p+1} \rangle.$$

Es ist also x ein p^2 -Zyklus in P_{p^2} . Insbesondere ist $\langle x^p \rangle = Z(P_{p^2}) = \langle (1, \dots, p) \cdots (p^2 - p + 1, \dots, p^2) \rangle$. Wir können daher $x = (1, 1+p, \dots, 1+(p-1)p, 2, 2+p, \dots, 2+(p-1)p, \dots, p, 2p, \dots, p^2)$ annehmen. Dann gilt auch

$$C_{P_{p^2}}(Q) = C_{P_{p^2}}(x) \cap C_{P_{p^2}}(y) = \langle x \rangle \cap C_{P_{p^2}}(y) = \langle x^p \rangle = Z(Q).$$

Abschließend untersuchen wir den Fall $l = 3$, $k = 1$ und $|B_1| = p^3$. Dann ist also $Q \leq R_1 = P_{p^3}$, und Q operiert regulär auf $\{1, \dots, p^3\}$. Nach [35], S.I.6.5 operiert dann auch $C_{\mathfrak{S}_{p^3}}(Q)$ regulär auf $\{1, \dots, p^3\}$. Insbesondere ist also $|Q| = p^3 = |C_{\mathfrak{S}_{p^3}}(Q)|$. Nach Lemma 3.5.1 ist außerdem $Z(Q)$ die einzige p -Sylowgruppe von $C_{\mathfrak{S}_{p^3}}(Q)$, so dass $C_{\mathfrak{S}_{p^3}}(Q) = Q = Z(Q)$ folgt. Demzufolge ist Q abelsch. Da Q wegen [70], S. 3.1.5 nicht zyklisch sein kann, folgt weiter, dass $C_p \times C_p \times C_p \cong Q \leq P_{p^3}$ oder $C_{p^2} \times C_p \cong Q \leq P_{p^3}$ ist. Damit ist Q in \mathfrak{S}_{p^3} entweder zu $E_{p^3} := \langle x, y, z \rangle$ mit $z = (1, \dots, p) \cdots (p^3 - p + 1, \dots, p^3)$, $x = (1, p+1, \dots, 1+(p-1)p) \cdots (p^3 - p^2 + 1, p^3 - p^2 + p + 1, \dots, p^3)$, $y = (1, 1+p^2, \dots, 1+(p-1)p^2) \cdots (p^2, 2p^2, \dots, p^3)$ oder zu $\langle x, u \rangle$ konjugiert. Dabei ist u ein Produkt von p Zyklen der Länge p^2 und $u^p = z$.

Damit ist die Aussage des Lemmas schließlich bewiesen. \square

Das obige Lemma zeigt unter anderem, dass Gruppen der Ordnungen $\leq p^3$ nur Vertices irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln aus Blöcken vom Gewicht $\leq p^2$ sein können. Im Fall $p = 2$ kennen wir nach Bemerkung 4.2.7 und Satz 4.2.8 die Vertices aller irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen, welche in Blöcken vom Gewicht $\leq 4 = p^2$ liegen. Damit erhalten wir dann sofort:

Lemma 4.3.3. *Es seien $p = 2$ und Q eine Gruppe der Ordnung ≤ 8 . Ferner sei Q ein Vertex eines irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduls, welcher in einem Block vom Gewicht w liegt. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*

- (1) $Q = 1$ und $w = 0$,
- (2) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} P_2$ und $w = 1$,
- (3) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} (P_2)^2$ und $w = 2$,
- (4) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} Q_4 = E_4$ und $w = 2$,
- (5) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} (P_2)^3$ und $w = 3$,
- (6) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} Q_4 \times P_2$ und $w = 3$,
- (7) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} P_4$ und $w = 2$,
- (8) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} E_8$ und $w = 4$.

Außerdem tritt jeder dieser acht Fälle tatsächlich ein.

Bemerkung 4.3.4. In ungerader Charakteristik kennen wir die Vertices der irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln aus Blöcken vom Gewicht $\geq p$ im Allgemeinen nicht. Für $w < p$ haben die irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln aus Blöcken vom Gewicht w die Defektgruppen der jeweiligen Blöcke als Vertices. Diese Defektgruppen sind wiederum in \mathfrak{S}_n zu $(P_p)^w$ konjugiert.

Im Fall $p = 3 = w$ ist $(P_p)^3$ unter anderem ein Vertex des irreduziblen $F\mathfrak{S}_{10}$ -Moduls $D^{(7,2,1)}$. Somit ist $(P_p)^w$ für $w \leq 3$ stets Vertex irreduzibler Moduln symmetrischer Gruppen. Das vorige Lemma für den Fall $p = 2$ legt ferner folgende Vermutung nahe:

Vermutung 4.3.5. Es seien $p > 2$ und Q eine Gruppe der Ordnung $\leq p^3$. Ferner sei Q Vertex eines irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduls, welcher in einem Block vom p -Gewicht w liegt. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

- (1) $Q = 1$ und $w = 0$,
- (2) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} P_p$ und $w = 1$,
- (3) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} (P_p)^2$ und $w = 2$,
- (4) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} E_{p^2}$ und $w = p$,
- (5) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} (P_p)^3$ und $w = 3$,
- (6) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} E_{p^2} \times P_p$ und $w = p + 1$,
- (7) $Q \sim_{\mathfrak{S}_n} E_{p^3}$ und $w = p^2$.

Außerdem tritt jeder dieser sieben Fälle tatsächlich ein.

4.4 Vollständig zerfallende Moduln

In [64] führt A.J.E.Ryba die sogenannten Fibonacci-Moduln ein. Diese sind irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln in Charakteristik 5, deren Dimensionen gerade der n -ten beziehungsweise $(n-1)$ -ten Fibonacci-Zahl entsprechen und deren Einschränkungen auf jede Young-Untergruppe von \mathfrak{S}_n halbeinfach sind. Diese Moduln sind ein Spezialfall der sogenannten vollständig zerfallenden Moduln. Wir werden diese im Folgenden näher betrachten und zeigen, dass deren Vertizes stets die Defektgruppen ihrer Blöcke sind. Dazu sei F ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

Definition 4.4.1. (i) Es seien $\lambda \vdash n \in \mathbb{N}^*$ mit $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ und $\lambda_s \neq 0$. Dann setzen wir $h(\lambda) := s$ und $\chi(\lambda) := \lambda_1 - \lambda_s + s$.

- (ii) Ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul D^λ heißt **vollständig zerfallend**, falls $\text{Res}_{\mathfrak{S}_\mu}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ für jede Young-Untergruppe \mathfrak{S}_μ von \mathfrak{S}_n halbeinfach ist.

Satz 4.4.2 ([44], Thm. 2.1, L. 1.7). *Es seien $n \in \mathbb{N}^*$ und D^λ ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) D^λ ist vollständig zerfallend.
- (ii) Für alle $i < n$ ist $\text{Res}_{\mathfrak{S}_i}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ halbeinfach.
- (iii) Es ist $\chi(\lambda) \leq p$.

Definition 4.4.3. Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ sei $\Phi_n := \{D_1^n, \dots, D_{z(n)}^n\}$ eine Menge irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln, welche die folgenden Bedingungen erfüllen.

- (1) Sind $n \geq 2$ und $j \in \{1, \dots, z(n)\}$, so ist $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D_j^n) \cong a_1 D_1^{n-1} \oplus \dots \oplus a_{z(n-1)} D_{z(n-1)}^{n-1}$ für gewisse $a_1, \dots, a_{z(n-1)} \in \mathbb{N}$.
- (2) Sind $n \geq 2$ und $i \in \{1, \dots, z(n-1)\}$, so existiert ein $j \in \{1, \dots, z(n)\}$ mit $D_i^{n-1} \mid \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D_j^n)$.

Wir setzen $\Phi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Phi_n$ und nennen Φ ein **halbeinfaches induktives System** (hiS).

Bemerkung 4.4.4. Nach Satz 4.4.2 sind also alle Moduln eines solchen halbeinfachen induktiven Systems vollständig zerfallend. Wir betrachten nun eine spezielle Klasse halbeinfacher induktiver Systeme. Dazu seien $n \in \mathbb{N}^*$ sowie

$$\begin{aligned} s &\in \{1, 2, \dots, p-1\} \\ \xi_n^s &:= \{D^\mu \mid \mu \in \mathcal{P}_{n,p}, h(\mu) = s, \chi(\mu) \leq p\} \\ \omega_n^s &:= \{D^\mu \mid \mu \in \mathcal{P}_{n,p}, h(\mu) < s, \mu_1 \leq p-s\}. \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned}\xi_n^s &= \emptyset \Leftrightarrow n < s, \\ \omega_n^s &= \emptyset \Leftrightarrow n > (p-s)(s-1).\end{aligned}$$

Schließlich setzen wir $\Phi_n(s) := \xi_n^s \cup \omega_n^s$ und $\Phi(s) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Phi_n(s)$. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann:

Satz 4.4.5 ([44], Thm. 2.8(i)). *Für jedes $s \in \{1, \dots, p-1\}$ ist $\Phi(s)$ ein halbeinfaches induktives System.*

Bemerkung/Beispiel 4.4.6. (a) Ist $s \in \{1, \dots, p-1\}$, so beinhaltet das hiS $\Phi(s)$ also insbesondere alle vollständig zerfallenden Moduln symmetrischer Gruppen in Charakteristik p , welche zu Partitionen mit genau s Teilen gehören.

- (b) Für eine p -reguläre Partition $\lambda := (n-m, m)$ von n ist der irreduzible Modul D^λ nach Satz 4.4.2 genau dann vollständig zerfallend, wenn $n-2m+2 = \chi(\lambda) \leq p$ ist, d.h. genau dann, wenn $n-2m \leq p-2$ ist.

In Charakteristik 2 existieren daher keine vollständig zerfallenden Moduln zu Partitionen mit genau zwei Teilen.

In Charakteristik $p > 2$ existieren für jedes $n > p-2$ genau $(p-1)/2$ vollständig zerfallende Moduln zu Partitionen mit genau zwei Teilen. Die entsprechenden Partitionen haben dabei die Form $(r+i, r-i)$ mit $i = 0, \dots, (p-1)/2-1$, falls $n = 2r$ ist und $(r+1+i, r-i)$ mit $i = 0, \dots, (p-1)/2-1$, falls $n = 2r+1$ ist.

Insbesondere ist im Fall $p = 3$, $n \geq 2$ der alternierende Modul der einzige vollständig zerfallende $F\mathfrak{S}_n$ -Modul zu einer Partition mit zwei Teilen.

Im Fall $p = 5$, $n \geq 4$ existieren genau zwei vollständig zerfallende $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln D^{λ_n} und D^{μ_n} zu Partitionen mit genau zwei Teilen. Genauer ist $\lambda_n = (r, r)$ und $\mu_n = (r+1, r-1)$ für $n = 2r$ beziehungsweise $\lambda_n = (r+2, r-1)$ und $\mu_n = (r+1, r)$ für $n = 2r+1$. Außerdem ist $\dim(D^{\lambda_n}) = f_{n-1}$ und $\dim(D^{\mu_n}) = f_n$, wobei wir mit f_{n-1} beziehungsweise f_n die $(n-1)$ -te beziehungsweise n -te Fibonacci-Zahl bezeichnen.

Wir werden nun die Vertizes der vollständig zerfallenden Moduln bestimmen.

Lemma 4.4.7. *Es seien $n \in \mathbb{N}^*$ und D^λ ein vollständig zerfallender $F\mathfrak{S}_n$ -Modul. Dann sind die Vertizes von D^λ genau die Defektgruppen seines Blocks.*

Beweis. Wir zeigen, dass für jedes $s \in \{1, \dots, p-1\}$ die Vertizes der Moduln aus $\Phi_n(s)$ genau die Defektgruppen der entsprechenden Blöcke sind. Im Fall $n \equiv 0 \pmod{p}$ liegt nach [29] Thm. 3.3, L.3.5 genau einer der Moduln aus $\Phi_n(s)$ im Hauptblock von $F\mathfrak{S}_n$. Ferner ist dessen Dimension nach [32], Thm. 5.7.1 nicht durch p teilbar. Folglich sind die Vertizes dieses Moduls gerade die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n , also die Defektgruppen des Hauptblocks von $F\mathfrak{S}_n$.

Es sei nun $D \in \Phi_n(s)$ einer der übrigen Moduln. Dann liegt D nach [32], 5.2 in einem Block vom Gewicht $w < n/p$. Da D vollständig zerfallend ist, ist $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{pw}}^{\mathfrak{S}_n}(D)$ halbeinfach, und die irreduziblen Summanden stammen alle aus $\Phi_{pw}(s)$. Außerdem ist D relativ \mathfrak{S}_{pw} -projektiv, so dass unter diesen Summanden einer sein muss, dessen Vertizes in \mathfrak{S}_n zu denen von D konjugiert sind. Da aber D nicht relativ \mathfrak{S}_{pw-1} -projektiv und der einzige Modul aus $\Phi_{pw}(s)$, welcher nicht \mathfrak{S}_{pw-1} -projektiv ist, derjenige aus dem Hauptblock von $F\mathfrak{S}_{pw}$ ist, sind die Vertizes von D also in \mathfrak{S}_n zu den p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_{pw} konjugiert und damit gleich den Defektgruppen des Blocks von D .

Falls $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist und $D \in \Phi_n(s)$ in einem Block vom Gewicht w liegt, so ist D relativ \mathfrak{S}_{pw} -

projektiv, aber nicht relativ \mathfrak{S}_{pw-1} -projektiv, und es existiert auch hier ein irreduzibler direkter Summand von $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{pw}}^{\mathfrak{S}_n}(D)$, dessen Vertizes in \mathfrak{S}_n zu denen von D konjugiert sind. Da aber der einzige Modul aus $\Phi_{pw}(s)$, der nicht relativ \mathfrak{S}_{pw-1} -projektiv ist, der aus dem Hauptblock von $F\mathfrak{S}_{pw}$ ist, folgt auch in diesem Fall, dass die Vertizes von D in \mathfrak{S}_n zu den p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_{pw} konjugiert und damit gleich den Defektgruppen des Blocks von D sind. \square

Kapitel 5

Verallgemeinerte Young-Moduln

In [26] bestimmt J.Grabmeier die Vertizes und Quellen von Young-Moduln symmetrischer Gruppen. In ungerader Charakteristik kann man diese Young-Moduln als Spezialfall einer größeren Klasse unzerlegbarer $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln ansehen, wie S.Donkin in [16] zeigt. Wir werden uns im Folgenden einige Eigenschaften dieser unzerlegbaren verallgemeinerten Young-Moduln genauer ansehen und insbesondere ihre Vertizes und Quellen bestimmen.

5.1 Definitionen

Notationen: In diesem Kapitel seien

- F ein Körper mit $\text{char}(F) = p > 2$,
- \mathcal{P} die Menge aller Partitionen natürlicher Zahlen,
- $\mathcal{C}(k, n)$ die Menge aller Kompositionen von $n \in \mathbb{N}$, bei denen genau die ersten k Teile von 0 verschieden sind,
- $\mathcal{P}(k, n)$ die Menge aller Partitionen von $n \in \mathbb{N}$, bei denen genau die ersten k Teile von 0 verschieden sind,
- $\mathcal{P}(k|l, n)$ die Menge aller Elemente aus \mathcal{C}_n der Form $(\lambda|p\mu)$ mit $\lambda \in \mathcal{P}(k, s)$, $\mu \in \mathcal{P}(l, t)$ für gewisse $s, t \in \mathbb{N}$ mit $n = s + pt$.

Definition 5.1.1. (i) Es seien $a, b, n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ eine Partition von a und $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_l)$ eine Partition von b mit $a + b = n$. Wir definieren den **verallgemeinerten Permutationsmodul**

$$M(\alpha|\beta) := \text{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha \times \mathfrak{S}_\beta}^{\mathfrak{S}_n} (F \boxtimes \text{sgn}).$$

- (ii) Ein $F\mathfrak{S}_n$ -Modul heißt **verallgemeinerter Young-Modul**, wenn er isomorph zu einem direkten Summanden einer direkten Summe verallgemeinerter Permutationsmoduln ist.

Mit diesen Bezeichnungen gilt

Satz 5.1.2 ([16], 1.1.4). *Die Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer verallgemeinerter Young-Moduln für $F\mathfrak{S}_n$ ist gerade $|\{(\lambda, \mu) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mid |\lambda| + p|\mu| = n\}|$. Ferner ist jeder unzerlegbare verallgemeinerte Young-Modul absolut unzerlegbar.*

Bemerkung 5.1.3. In [16], 2.3.8 zeigt S. Donkin, dass genau eine Parametrisierung $(\lambda, \mu) \mapsto Y(\lambda|p\mu)$ der Isomorphieklassen unzerlegbarer verallgemeinerter Young-Moduln für $F\mathfrak{S}_n$ durch Partitionspaare $(\lambda, \mu) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ mit $|\lambda| + p|\mu| = n$ mit folgender Eigenschaft existiert: Für alle $(\lambda, \mu) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ mit $|\lambda| + p|\mu| = n$ ist

$$M(\lambda|p\mu) = Y(\lambda|p\mu) \oplus N(\lambda|p\mu),$$

wobei jeder unzerlegbare direkte Summand von $N(\lambda|p\mu)$ zu einem Modul $Y(\varphi|p\psi)$ für passendes $(\varphi, \psi) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ mit $|\varphi| + p|\psi| = n$ und $(\varphi|p\psi) \triangleright (\lambda|p\mu)$ isomorph ist.

Lemma 5.1.4. *Unzerlegbare verallgemeinerte Young-Moduln sind selbstdual.*

Beweis. Wir betrachten den unzerlegbaren verallgemeinerten Young-Modul $Y := Y(\lambda|p\mu)$ für $F\mathfrak{S}_n$ und nehmen an, dass dieser nicht selbstdual ist. Nach Konstruktion ist $M := M(\lambda|p\mu)$ selbstdual, d.h. mit Y ist auch der dazu duale Modul Y^* zu einem direkten Summanden von M isomorph. Folglich ist $Y^* = Y(\varphi|p\psi)$ für passendes $(\varphi|p\psi) \triangleright (\lambda|p\mu)$. Dann sind aber Y und Y^* auch isomorph zu direkten Summanden von $M(\varphi|p\psi)$, woraus der Widerspruch $(\lambda|p\mu) \triangleright (\varphi|p\psi)$ folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Bemerkung 5.1.5. Für Partitionenpaare der Form $(\lambda|\emptyset)$ erhalten wir gerade die gewöhnlichen Young-Moduln.

5.2 Young-Vertizes und Young-Quellen

Wir wiederholen zunächst einige Definitionen und Aussagen aus [16] und [26].

Definition 5.2.1. Es seien G eine Gruppe und q eine Primzahl. Eine Menge \mathcal{Y} von Untergruppen von G heißt **Mackey-System** von G , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) \mathcal{Y} ist abgeschlossen bezüglich Durchschnittsbildung,
- (2) \mathcal{Y} ist abgeschlossen bezüglich Konjugation mit Elementen aus G ,
- (3) $\{1_G\} \in \mathcal{Y}$,
- (4) \mathcal{Y} enthält eine p -Sylowgruppe von G .

Bemerkung 5.2.2. (a) Sind \mathcal{Y} ein Mackey-System einer Gruppe G und H eine Untergruppe von G , so ist $\mathcal{Y} \downarrow H := \{H \cap A \mid A \in \mathcal{Y}\}$ ein Mackey-System von H .

- (b) Es gelten die Voraussetzungen aus Definition 5.2.1. Weiter seien \mathcal{Y} ein Mackey-System von G , K ein Körper der Charakteristik $q > 0$ und M ein unzerlegbarer KG -Modul. Ein Element $A \in \mathcal{Y}$ heißt genau dann **\mathcal{Y} -Vertex** von M , wenn M relativ A -projektiv, aber nicht relativ B -projektiv für alle echten Untergruppen B von A mit $B \in \mathcal{Y}$ ist.
- (c) Die \mathcal{Y} -Vertizes eines unzerlegbaren KG -Moduls M bilden eine Konjugationsklasse von Untergruppen von G .
- (d) Es sei M ein unzerlegbarer KG -Modul mit \mathcal{Y} -Vertex A . Ein unzerlegbarer KA -Modul N mit $M \mid \text{Ind}_A^G(N)$ heißt **\mathcal{Y} -Quelle** von M . Sind N_1 und N_2 zwei \mathcal{Y} -Quellen von M , so existiert ein Element $g \in N_G(A)$ mit $N_1 \cong {}^g N_2$.
- (e) Hat ein unzerlegbarer KG -Modul M eine eindimensionale \mathcal{Y} -Quelle, so sagt man, er habe **lineare \mathcal{Y} -Quelle**.

Wir betrachten ab jetzt den Fall $G = \mathfrak{S}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$. Dann bildet die Menge aller Young-Untergruppen von G ein Mackey-System von G . In dem Fall bezeichnen wir die \mathcal{Y} -Vertizes (beziehungsweise \mathcal{Y} -Quellen) auch als **Young-Vertizes** (beziehungsweise **Young-Quellen**), und es gilt folgender Satz:

Satz 5.2.3 ([16] 1.1, 5.1.3). (i) Ist A ein Young-Vertex eines unzerlegbaren $F\mathfrak{S}_n$ -Moduls, so gilt $|A : B| \equiv 0 \pmod{p}$ für alle echten Young-Untergruppen B von A .

(ii) Die unzerlegbaren verallgemeinerten Young-Moduln sind genau die unzerlegbaren $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln mit linearer Young-Quelle.

(iii) Es seien $Y(\lambda|p\mu)$ ein unzerlegbarer verallgemeinerter Young-Modul sowie $\sum_{i=0}^{r_1} \lambda(i)p^i$ und $\sum_{i=0}^{r_2} \mu(i)p^i$ die p -adischen Entwicklungen von λ und μ sowie $r := \max\{r_1, r_2\}$. Dann hat $Y(\lambda|p\mu)$ einen Young-Vertex $H = \mathfrak{S}_\rho$ mit

$$\rho := ((p^{r+1})^{|\mu(r)|}, (p^r)^{|\lambda(r)|+|\mu(r-1)|}, \dots, (p^2)^{|\lambda(2)|+|\mu(1)|}, p^{|\lambda(1)|+|\mu(0)|}, 1^{|\lambda(0)|}).$$

5.3 Vertizes und Quellen verallgemeinerter Young-Moduln

Weiterhin betrachten wir $G := \mathfrak{S}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$. Wir können nun mit Hilfe von Satz 5.2.3 die gewöhnlichen Vertizes und Quellen unzerlegbarer verallgemeinerter Young-Moduln bestimmen.

Satz 5.3.1. (i) *Unzerlegbare verallgemeinerte Young-Moduln für FG haben stets triviale Quelle.*

(ii) *Ein unzerlegbarer verallgemeinerter Young-Modul für FG mit Young-Vertex H hat eine p -Sylowgruppe von H als Vertex.*

Beweis. (i) Es sei Y ein unzerlegbarer verallgemeinerter Young-Modul für FG mit Young-Vertex H und linearer Young-Quelle L . Ferner seien V ein Vertex und S eine Quelle von Y . Dann gilt $Y| \text{Ind}_H^G(L)$ und

$$S| \text{Res}_V^G(Y) | \text{Res}_V^G(\text{Ind}_H^G(L)) \cong \bigoplus_{VgH \in V \backslash G/H} \text{Ind}_{V \cap gHg^{-1}}^V(\text{Res}_{V \cap gHg^{-1}}^{gHg^{-1}}(^g L)).$$

Folglich ist $S| \text{Ind}_{V \cap gHg^{-1}}^V(\text{Res}_{V \cap gHg^{-1}}^{gHg^{-1}}(^g L))$ für ein $g \in G$. Außerdem ist $\text{Res}_{V \cap gHg^{-1}}^{gHg^{-1}}(^g L)$ ein eindimensionaler Modul für die p -Gruppe $V \cap gHg^{-1}$ und somit trivial. Da V ein Vertex von S ist, folgt weiter $V = V \cap gHg^{-1}$. Also ist S der triviale FV -Modul F_V .

(ii) Es sei wieder Y ein unzerlegbarer verallgemeinerter Young-Modul für FG mit Young-Vertex H , Young-Quelle L und Vertex V . Wir können annehmen, dass V in einer p -Sylowgruppe von H enthalten ist. Weiter sei H' die Kommutatorgruppe von H . Dann gilt

$$Y| \text{Ind}_H^G(L), \quad L| \text{Res}_H^G(\text{Ind}_H^G(L)), \quad F_{H'} = \text{Res}_{H'}^H(L).$$

Wir zeigen, dass $L| \text{Res}_H^G(Y)$ gilt. Zunächst ist

$$\text{Res}_H^G(Y) | \text{Res}_H^G(\text{Ind}_H^G(L)) \cong \bigoplus_{HgH \in H \backslash G/H} \text{Ind}_{H \cap gHg^{-1}}^H(\text{Res}_{H \cap gHg^{-1}}^{gHg^{-1}}(^g L)).$$

Ferner sei $\text{Res}_H^G(Y) = X_1 \oplus \dots \oplus X_r$ mit unzerlegbaren FH -Moduln X_1, \dots, X_r . Da Y relativ H -projektiv ist, ist $Y| \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(Y))$ und damit $Y| \text{Ind}_H^G(X_i)$ für ein $i \in \{1, \dots, r\}$. Wir bezeichnen einen Young-Vertex von X_i mit H_i . Dann ist $X_i| \text{Ind}_{H_i}^H(\text{Res}_{H_i}^H(X_i))$, und wegen $Y| \text{Ind}_{H_i}^G(\text{Res}_{H_i}^H(X_i))$ folgt $H \leq_G H_i$, also $H = H_i$. Somit hat auch X_i Young-Vertex H . Ferner existiert ein $g \in G$ mit $X_i| \text{Ind}_{H \cap gHg^{-1}}^H(\text{Res}_{H \cap gHg^{-1}}^{gHg^{-1}}(^g L))$. Folglich ist $H \leq_G H \cap gHg^{-1} \leq H$, d.h. $H \leq gHg^{-1}$ und $g \in N_G(H)$. Also haben wir $X_i| ^g L$, woraus $L \cong ^{g^{-1}} X_i$ und schließlich $L \cong ^{g^{-1}} X_i| \text{Res}_H^G(Y)$ nach [36], Thm. VII.9.3 folgt. Daher ist $F_{H'}| \text{Res}_{H'}^G(Y)$. Daraus folgt nun, dass $Q \leq_G V$ für jeden Vertex Q von $F_{H'}$ gilt. Da H eine Young-Untergruppe von $G = \mathfrak{S}_n$ ist, ist andererseits $|H : H'| = 2^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und somit $Q \in \text{Syl}_p(H') \subseteq \text{Syl}_p(H)$ wegen $p > 2$. Demzufolge enthält V eine p -Sylowgruppe von H , und die Behauptung des Satzes folgt. \square

Korollar 5.3.2. Es seien $Y(\lambda|p\mu)$ ein unzerlegbarer verallgemeinerter Young-Modul für $F\mathfrak{S}_n$ sowie $\lambda = \sum_{i=0}^{r_1} \lambda(i)p^i$ und $\mu = \sum_{i=0}^{r_2} \mu(i)p^i$ die p -adischen Entwicklungen von λ und μ sowie $r := \max\{r_1, r_2\}$. Dann sind die p -Sylowgruppen von $\mathfrak{S}_\rho \leq \mathfrak{S}_n$ mit

$$\rho := ((p^{r+1})^{|\mu(r)|}, (p^r)^{|\lambda(r)|+|\mu(r-1)|}, \dots, (p^2)^{|\lambda(2)|+|\mu(1)|}, p^{|\lambda(1)|+|\mu(0)|}, 1^{|\lambda(0)|})$$

Vertizes von $Y(\lambda|p\mu)$. Außerdem hat $Y(\lambda|p\mu)$ triviale Quellen.

Bemerkung 5.3.3. Wir betrachten $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$, und für alle $j \in \mathbb{N}^*$ setzen wir

$$l_j := \lambda_j - \lambda_{j+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_j^i p^i, \quad m_j := (\mu_j - \mu_{j+1})p = p \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta_j^i p^i, \quad \vartheta_j^{-1} := 0$$

mit $\nu_j^i, \vartheta_j^i \in \{0, \dots, p-1\}$ für alle $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}^*$.

Dann sind die p -Sylowgruppen von $\prod_{i=0}^{\infty} (\mathfrak{S}_{p^i})^{\nu_j^i + \vartheta_j^{i-1}}$ in \mathfrak{S}_n konjugiert zu den p -Sylowgruppen von $\mathfrak{S}_{l_j} \times \mathfrak{S}_{m_j}$. Demzufolge sind auch die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_ρ in \mathfrak{S}_n konjugiert zu den p -Sylowgruppen von

$$\mathfrak{S} := \prod_{j=1}^{\infty} (\mathfrak{S}_{l_j}^j \times \mathfrak{S}_{m_j}^j).$$

Also sind die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S} Vertizes des unzerlegbaren verallgemeinerten Young-Moduls $Y(\lambda|p\mu)$.

5.4 Irreduzible Spechtmoduln

Es sei jetzt F algebraisch abgeschlossen. Für ein $n \in \mathbb{N}^*$ bezeichnen wir mit S^λ wie üblich den Spechtmodul für $F\mathfrak{S}_n$ zur Partition λ von n . In [31] zeigt D.J. Hemmer, dass irreduzible Spechtmoduln symmetrischer Gruppen stets verallgemeinerte Young-Moduln sind. Somit haben irreduzible Spechtmoduln stets triviale Quelle. Kennt man außerdem den Parameter des entsprechenden verallgemeinerten Young-Moduls, so kann man auch die Vertizes bestimmen. Dieser Parameter ist allerdings nur in Spezialfällen bekannt.

Satz 5.4.1 ([31], Prop. 1.1, Prop. 5.2). (i) *Es gilt genau dann $S^\lambda \cong Y(\lambda|\emptyset)$, wenn S^λ irreduzibel und λ eine p -reguläre Partition ist.*

(ii) *Es gilt genau dann $S^\lambda \cong Y(\lambda'|\emptyset) \otimes \text{sgn}$, wenn S^λ irreduzibel und λ eine p -beschränkte Partition ist.*

(iii) *Es sei $\alpha := \tau + p\mu$ mit einer p -beschränkten Partition τ und einer beliebigen Partition μ . Ferner sei $\mathbf{m}(\tau')$ die zu τ' Mullineux-konjugierte Partition. Dann gilt: $Y(\alpha|\emptyset) \cong Y(\mathbf{m}(\tau')'|p\mu)$.*

Somit sind die Vertizes irreduzibler Spechtmoduln zu p -regulären und p -beschränkten Partitionen bestimmbar. Die Computerberechnungen sowie die theoretische Bestimmung der Parameter in einigen konkreten Spezialfällen legen folgende allgemeine Vermutung nahe.

Vermutung 5.4.2. Es sei S^λ ein irreduzibler Spechtmodul für $F\mathfrak{S}_n$. Dann erhält man den Parameter des zugehörigen verallgemeinerten Young-Moduls wie folgt. Im Young-Diagramm $[\lambda]$ von λ streiche man sukzessive alle möglichen vertikalen p -Haken. Die entstehende Partition sei $\hat{\lambda}$. Weiter habe $[\lambda]$ genau m Spalten, und h_i sei die Anzahl der in Spalte i gestrichenen vertikalen p -Haken für $i = 1, \dots, m$. Dann gilt $S^\lambda \cong Y(\hat{\lambda}|p(h_1, \dots, h_m))$.

Bemerkung 5.4.3. Sind K ein Körper der Charakteristik 2, $n \in \mathbb{N}^*$, μ eine 2-reguläre Partition von n und der $K\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul S^μ irreduzibel, so folgt $S^\mu \cong Y^\mu$, in Analogie zu obigem Satz, [siehe z.B. [31], Prop. 1.1].

Ist S^λ irgendein irreduzibler $K\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul, so gilt:

- (i) λ ist 2-regulär, oder
- (ii) λ ist 2-beschränkt, oder
- (iii) $\lambda = (2, 2)$.

Einen Beweis hierfür findet man in [41]. Im Fall (i) ist dann also $D^\lambda \cong S^\lambda \cong Y^\lambda$. Im Fall (ii) ist $S^\lambda \cong S^{\lambda'} \cong Y^{\lambda'}$. Die Vertizes der gewöhnlichen Young-Moduln sind bekannt. Ist nämlich λ eine Partition von n , so setzen wir $l_j := \lambda_j - \lambda_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}^*$. Mit ähnlichen Argumenten wie in Bemerkung 5.3.3 folgt dann, dass die Vertizes des Young-Moduls Y^λ in \mathfrak{S}_n konjugiert zu den 2-Sylowgruppen von

$$\mathfrak{S} := \prod_{j=1}^{\infty} (\mathfrak{S}_{l_j})^j$$

sind, [siehe [70], S. 3.7.3]. Außerdem hat Y^λ triviale Quelle. Ist schließlich $\lambda = (2, 2)$, so ist $S^\lambda \cong D^{(3,1)}$, hat Vertex Q_4 und triviale Quelle. Dies zeigt, dass in Charakteristik 2, die Quellen und Vertizes aller irreduziblen Spechtmoduln bekannt sind.

Kapitel 6

Irreduzible Moduln zu Hakenpartitionen

6.1 Notationen und Vorbemerkungen

Bemerkung 6.1.1. (a) Im Folgenden seien

- $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$, $n \geq 2$, $n - 1 \geq r \in \mathbb{N}$,
- F ein Körper der Charakteristik p ,
- $M := M^{(n-1,1)}$ der natürliche Permutationsmodul für $F\mathfrak{S}_n$,
- $S := S^{(n-1,1)}$ der natürliche Spechtmodul für $F\mathfrak{S}_n$,
- $D := D^{(n-1,1)}$ der natürliche irreduzible Modul für $F\mathfrak{S}_n$.

(b) Wir haben stets einen $F\mathfrak{S}_n$ -Epimorphismus

$$\varphi : S \longrightarrow D \cong \text{Hd}(S).$$

Dieser induziert wiederum einen $F\mathfrak{S}_n$ -Epimorphismus

$$\Phi := \bigwedge^r \varphi : \bigwedge^r S \longrightarrow \bigwedge^r D =: D_r$$

für $r = 0, \dots, n - 1$. Nach [8], L. 1.7 ist stets $\bigwedge^r S \cong S^{(n-r, 1^r)}$.

(c) Im Fall $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist $S \cong D$ und $M \cong D \oplus D^{(n)}$, insbesondere ist also $\dim_F(D) = n - 1$. Folglich ist dann auch $\bigwedge^r D \cong S^{(n-r, 1^r)}$ und irreduzibel nach [37], Thm. 24.1. In dem Fall sind außerdem die Vertizes der Moduln D_r bekannt. Nach [69], Thm. 2 sind sie in \mathfrak{S}_n zu $P_{n-r-1} \times P_r$ konjugiert.

(d) ([37], Ex.5.1) Wir betrachten daher in diesem Abschnitt ab jetzt den Fall $n = xp$ für ein $x \in \mathbb{N}^*$ und verwenden weiterhin die Notation $D_r := \bigwedge^r D$ für alle $r \leq n - 2$. In diesem Fall ist M einreihig mit Kompositionsreihe $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq 0$ und $M/M_1 \cong D^{(n)} \cong M_2$, $M_1 = S$, $M_1/M_2 \cong D$. Genauer gilt Folgendes:

Es sei $\mathfrak{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ die aus allen $(n - 1, 1)$ -Tabloiden bestehende F -Basis von M , so dass i für $i = 1, \dots, n$ der Eintrag der zweiten Zeile von b_i ist. Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ sind dann $\mathfrak{B}_j := \{b_i - b_j \mid i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}\}$ eine F -Basis von S und $\{\sum_{i=1}^n b_i\}$ eine von M_2 . Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ und jedes $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ ist ferner $\mathfrak{B}_{j,k} := \{\overline{b_i - b_j} \mid i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, k\}\}$ eine F -Basis von M_1/M_2 . Dabei bezeichne stets $\overline{b_i - b_j}$ die Restklasse von $b_i - b_j$ modulo M_2 . Insbesondere ist $\dim_F(D) = n - 2$.

Ferner ist $D^{(n)} \cong S^{(n)}$, und für $0 < r \leq n - 2$ ist dann $S^{(n-r, 1^r)}$ nach [37], Thm. 24.1 einreihig und hat genau zwei Kompositionsfaktoren. Wegen $\dim_F(D) = n - 2 < n - 1 = \dim_F(S)$ kann die Abbildung Φ in diesem Fall nicht injektiv sein. Somit muss dann

$\ker(\Phi) \cong \text{Soc}(S^{(n-r, 1^r)})$ und $\bigwedge^r D \cong \text{Hd}(S^{(n-r, 1^r)})$ gelten. Für $r < p$ ist insbesondere $\bigwedge^r D \cong D^{(n-r, 1^r)}$. Nach [17], Cor. 5.5 ist außerdem $\text{Hd}(S^{(n-r, 1^r)}) \cong \text{Soc}(S^{(n-r-1, 1^{r+1})})$ für alle $r = 0, \dots, n-1$. Somit erhalten wir $D_{n-2} \cong \text{Hd}(S^{(2, 1^{n-2})}) \cong \text{Soc}(S^{(1^n)}) = S^{(1^n)}$. Ferner liegt D_r als Kompositionsfaktor von $S^{(n-r, 1^r)}$ stets im Hauptblock von $F\mathfrak{S}_n$ und ist somit insbesondere nicht relativ \mathfrak{S}_{n-1} -projektiv nach Korollar 3.5.2.

Für $r < p-1$ wurden die Vertizes von D_r bereits in [70] bestimmt. Es handelt sich dabei stets um die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n . Wir werden daher im Folgenden hauptsächlich den Fall $r \geq p-1$ untersuchen. Zunächst zeigen wir jedoch, dass für $r \in \{0, \dots, n-2\}$ die Moduln D_r und D_{n-2-r} die gleichen Vertizes haben.

Lemma 6.1.2. *Es seien K ein Körper, G eine Gruppe, $m \in \mathbb{N}$ und V ein KG -Modul der Dimension m . Für alle $k \in \{0, \dots, m\}$ gilt dann*

$$\left(\bigwedge^m V\right)^* \otimes \bigwedge^k V \cong \left(\bigwedge^{m-k} V\right)^*.$$

Beweis. Es seien $\lambda \in (\bigwedge^m V)^*$ und $v \in \bigwedge^k V$. Dann ist die Abbildung

$$\gamma_{\lambda, v} : \bigwedge^{m-k} V \longrightarrow K, \quad w \mapsto \lambda(v \wedge w),$$

K -linear und liegt somit in $(\bigwedge^{m-k} V)^*$. Außerdem ist die Abbildung

$$\Gamma : \left(\bigwedge^m V\right)^* \times \left(\bigwedge^k V\right) \longrightarrow \left(\bigwedge^{m-k} V\right)^*, \quad (\lambda, v) \mapsto \gamma_{\lambda, v}$$

bilinear. Daher existiert genau eine K -lineare Abbildung

$$\Psi : \left(\bigwedge^m V\right)^* \otimes \left(\bigwedge^k V\right) \longrightarrow \left(\bigwedge^{m-k} V\right)^*$$

mit $\Psi(\lambda \otimes v) = \Gamma(\lambda, v) = \gamma_{\lambda, v}$ für alle $\lambda \in (\bigwedge^m V)^*$, $v \in (\bigwedge^k V)$. Ist $\{b_1, \dots, b_m\}$ eine K -Basis von V , so ist bekanntlich $\{b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$ eine K -Basis von $\bigwedge^k V$. Ferner ist $\bigwedge^m V$ und damit auch $(\bigwedge^m V)^*$ eindimensional. Es existiert also eine K -Basis $\{f\}$ von $(\bigwedge^m V)^*$ mit $f(b_1 \wedge \dots \wedge b_m) = 1$. Dann lässt sich jedes Element $u \in (\bigwedge^m V)^* \otimes (\bigwedge^k V)$ in der Form

$$u = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_k} (f \otimes (b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_k}))$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\alpha_{i_1 \dots i_k} \in K$ schreiben. Ist nun $u \in \ker(\Psi)$, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_k} \gamma_{f, b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_k}}(w) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_k} f(b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_k} \wedge w) \end{aligned}$$

für alle $w \in \bigwedge^k V$. Wählen wir also $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m$ und $\{j_{k+1}, \dots, j_m\} := \{1, \dots, m\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$ mit $1 \leq j_{k+1} < \dots < j_m \leq m$, so ist insbesondere

$$0 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_k} f(b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_k} \wedge b_{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge b_{j_m}) = \pm \alpha_{j_1 \dots j_k}.$$

Demnach ist $u = 0$ und $\ker(\Psi) = 0$. Also ist Ψ injektiv und aus Dimensionsgründen auch surjektiv. Schließlich seien $g \in G$, $\lambda \in (\bigwedge^m V)^*$, $v \in \bigwedge^k V$ und $w \in \bigwedge^{m-k} V$. Dann ist

$$\gamma_{g\lambda, gv}(w) = (g\lambda)(gv \wedge w) = \lambda(g^{-1}(gv \wedge w)) = \lambda(v \wedge g^{-1}w) = \gamma_{\lambda, v}(g^{-1}w) = (g\gamma_{\lambda, v})(w).$$

Dies zeigt, dass

$$\Psi(g(\lambda \otimes v)) = \Psi(g\lambda \otimes gv) = \gamma_{g\lambda,gv} = g\gamma_{\lambda,v} = g\Psi(\lambda \otimes v)$$

ist. Somit ist Ψ sogar ein Isomorphismus von KG -Moduln, und die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 6.1.3. Man beachte in vorigem Lemma den Zusammenhang mit der Dimensionsformel der entsprechenden Moduln. Es gilt nämlich $\dim((\bigwedge^m V)^* \otimes \bigwedge^k V) = \dim(\bigwedge^k V) = \binom{m}{k} = \binom{m-k}{k} = \dim((\bigwedge^{m-k} V)^*)$.

Korollar 6.1.4. Es seien K ein Körper der Charakteristik $q > 0$, G eine Gruppe, $m \in \mathbb{N}$ und V ein m -dimensionaler KG -Modul. Ferner sei $k \in \{0, \dots, m\}$, so dass $\bigwedge^k V$ ein unzerlegbarer KG -Modul ist. Dann ist auch $\bigwedge^{m-k} V$ ein unzerlegbarer KG -Modul und hat dieselben Vertizes wie $\bigwedge^k V$.

Beweis. Es sei dazu P ein Vertex von $\bigwedge^k V$. Nach obigem Lemma ist $\bigwedge^{m-k} V \cong [(\bigwedge^m V)^* \otimes \bigwedge^k V]^*$ und damit auch unzerlegbar. Für jeden Vertex Q von $\bigwedge^{m-k} V$ ist ferner $Q \leq_G P$ nach Lemma 2.2.6. Analog ist aber auch $P \leq_G Q$, so dass $P \sim_G Q$ folgt. \square

Bemerkung 6.1.5. Setzen wir in obigem Korollar $\bigwedge^k V$ nicht als unzerlegbar voraus, und ist $\bigwedge^k V = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$ mit unzerlegbaren KG -Moduln V_1, \dots, V_l , so gilt $\bigwedge^{m-k} V = [(\bigwedge^m V)^* \otimes V_1]^* \oplus \dots \oplus [(\bigwedge^m V)^* \otimes V_l]^*$. Weiter ist für jedes $i = 1, \dots, l$ der Modul $[(\bigwedge^m V)^* \otimes V_i]^*$ unzerlegbar und hat dieselben Vertizes wie V_i .

Das Korollar zeigt insbesondere auch, dass D_r und D_{n-2-r} stets die gleichen Vertizes haben für $r \in \{0, \dots, n-2\}$. Genauer ist $D_{n-2-r} \cong D_r \otimes S^{(1^n)}$ nach Bemerkung 6.1.1 und Lemma 6.1.2. Ferner gilt Folgendes:

Lemma 6.1.6. Für alle $r \in \{0, \dots, n-2\}$ ist $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D_r) \cong S^{(n-r-1, 1^r)}$.

Beweis. Offenbar gilt stets $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D) \cong D^{(n-2, 1)}$. Zusammen mit Bemerkung 6.1.1 erhalten wir für $r \in \{0, \dots, n-2\}$ dann

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D_r) = \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(\bigwedge^r D) \cong \bigwedge^r (\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D)) \cong \bigwedge^r D^{(n-2, 1)} \cong S^{(n-1-r, 1^r)}.$$

\square

Korollar 6.1.7. Ist $r \in \{0, \dots, n-2\}$, und ist P ein Vertex von D_r mit $P \leq P_n$, so gilt

$$P_{n-r-2} \times P_r <_{\mathfrak{S}_n} P \leq P_n.$$

Beweis. Nach Bemerkung 6.1.1 (c) ist $P_{n-r-2} \times P_r$ ein Vertex von $S^{(n-r-1, 1^r)}$. Aus obigem Lemma und Lemma 2.2.6 folgt dann $P_{n-r-2} \times P_r \leq_{\mathfrak{S}_n} P \leq P_n$. Da D_r außerdem nicht relativ \mathfrak{S}_{n-1} -projektiv ist, gilt sogar $P_{n-r-2} \times P_r <_{\mathfrak{S}_n} P$. \square

Bemerkung 6.1.8. (a) Es seien K ein Körper der Charakteristik $q > 0$, G eine Gruppe und V ein KG -Modul. Ist $s \in \mathbb{N}^*$, $s < q$, so gilt nach [40], 5.2 stets

$$\bigwedge^s V \Big| \bigotimes_{i=1}^s V.$$

Ist V projektiv, so ist also auch $\bigwedge^s V$ ein projektiver KG -Modul. Für beliebige KG -Moduln V und U sowie $s \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\bigwedge^s (V \oplus U) \cong \bigoplus_{i=0}^s \left[\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^{s-i} U \right].$$

Man beachte dabei den Zusammenhang mit der Dimensionsformel der entsprechenden Moduln. Sind nämlich $\dim(V) = m_1$ und $\dim(U) = m_2$, so gilt bekanntlich $\binom{m_1+m_2}{s} = \sum_{i=0}^s \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{s-i}$.

- (b) Ist weiterhin K ein Körper der Charakteristik $q > 0$, und ist $C = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung q^l für ein $l \in \mathbb{N}$, so besitzt KC genau q^l Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln. Genauer existiert zu jedem $i = 1, \dots, q^l$ bis auf Isomorphie genau ein unzerlegbarer KC -Modul T_i der Dimension i . Einen Beweis hierfür findet man zum Beispiel in [36], Thm. VII.5.3.

Mit diesen Bezeichnungen und $l = 1$ erhalten wir:

Lemma 6.1.9. *Es seien V ein projektiver KC -Modul und $s \in \mathbb{N}$ mit $s \not\equiv 0 \pmod{q}$. Dann ist auch $\bigwedge^s V$ ein projektiver KC -Modul.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach $\dim_K(V)$. Im Fall $V = 0$ ist die Behauptung klar. Es sei nun $\dim_K(V) = q$, d.h. $V \cong KC$. Für $s > q$ ist dann $\bigwedge^s V = 0$, und für $s < q$ ist $\bigwedge^s V \mid \bigotimes_{i=1}^s V$ nach obiger Bemerkung, also wieder projektiv. Wir können daher jetzt $\dim_K(V) > q$ und $V = V_1 \oplus V_2$ mit Untermoduln $V_1 \neq 0 \neq V_2$ annehmen. Dann ist nach obiger Bemerkung

$$\bigwedge^s V = \bigwedge^s (V_1 \oplus V_2) \cong \bigoplus_{i=0}^s \left[\bigwedge^i V_1 \otimes \bigwedge^{s-i} V_2 \right].$$

Wegen $q \nmid s$ folgt $q \nmid i$ oder $q \nmid s - i$ für alle $i = 0, \dots, s$. Nach Induktion ist also $\bigwedge^i V_1$ oder $\bigwedge^{s-i} V_2$ projektiv. Folglich ist $\bigwedge^i V_1 \otimes \bigwedge^{s-i} V_2$ projektiv für alle $i = 0, \dots, s$ und somit auch $\bigwedge^s V$. \square

6.2 Vertizes der Moduln D_r

Eine zentrale Rolle bei der Berechnung der Vertizes der in Bemerkung 6.1.1 eingeführten Moduln D_r wird der folgende Satz spielen.

Satz 6.2.1 ([5], Thm. 1.1). *Es seien G eine Gruppe, K ein Körper der Charakteristik $q > 0$, H eine Untergruppe von G sowie $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}q^{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}q^{n_s} \cong X \leq H$ für ein $s \in \mathbb{N}^*$ und $n_1 \geq \dots \geq n_s > 0$. Außerdem seien V ein KG -Modul, welcher relativ H -projektiv ist, und $c := c_X(\text{Res}_X^G(V))$ die Komplexität von $\text{Res}_X^G(V)$. Dann gilt*

$$|G : H|_q \frac{|X|}{q^{n_1} \dots q^{n_s}} \Bigg| \dim_K(V).$$

Dabei sei $|m|_q$ für jedes $m \in \mathbb{N}^*$ die höchste q -Potenz, die m teilt.

Bemerkung 6.2.2. Da für $n < p^2$ die Vertizes aller irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln stets die Defektgruppen der entsprechenden Blöcke sind, werden wir ab jetzt für den Rest dieses Abschnitts $xp = n \geq p^2$ annehmen. Weiterhin gelten die Bezeichnungen aus Bemerkung 6.1.1. Dann erhalten wir zunächst folgendes Lemma.

Lemma 6.2.3. *Es seien $x = ap + l$, $r := kp - m$ für gewisse $a \in \mathbb{N}$, $1 \leq m < p$ sowie $1 \leq k \leq l < p$ im Fall $m > 1$ und $1 \leq k < l < p$ im Fall $m = 1$. Dann sind die Vertizes von D_r die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n .*

Beweis. Unter den obigen Voraussetzungen ist $n - r - 2 = ap^2 + (l - k)p + m - 2$. Ist ferner P ein Vertex von D_r mit $P \leq P_n$, so existiert nach Korollar 6.1.7 ein $g \in \mathfrak{S}_n$ mit

$${}^g(P_{ap^2+(l-k)p+m-2} \times P_{kp-m}) =: Q < P \leq P_n.$$

Im Fall $m \geq 2$ ist somit

$$\begin{aligned} Q &\sim_{\mathfrak{S}_n} P_{ap^2} \times (P_p)^{l-k} \times (P_p)^{k-1} \sim_{\mathfrak{S}_n} P_{ap^2} \times (P_p)^{l-1} \\ P_n &= P_{ap^2+lp} = P_{ap^2} \times (P_p)^l. \end{aligned}$$

Da D_r nicht relativ \mathfrak{S}_{n-1} -projektiv ist, folgt daraus $P = P_n$. Für $m = 1$ ist

$$Q \sim_{\mathfrak{S}_n} P_{ap^2} \times (P_p)^{l-k-1} \times (P_p)^{k-1} \sim_{\mathfrak{S}_n} P_{ap^2} \times (P_p)^{l-2}$$

$$P_n = P_{ap^2+lp} = P_{ap^2} \times (P_p)^l.$$

Damit folgt, dass in diesem Fall stets

$$P_n = P_{ap^2+lp} = P_{ap^2} \times (P_p)^l \subseteq QC_{\mathfrak{S}_n}(P) \subseteq PC_{\mathfrak{S}_n}(P)$$

gelten muss. Nach Lemma 3.5.1 muss außerdem P eine p -Sylowgruppe von $PC_{\mathfrak{S}_n}(P)$ sein, so dass in diesem Fall ebenfalls $P = P_n$ folgt. \square

Bemerkung 6.2.4. Obiges Lemma schließt den Fall $r = p - 1$, $x \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$ ein. Somit hat also $D_{p-1} \cong D^{(n-p+1, 1^{p-1})}$ für $n = xp$ und $x \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$ die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n als Vertizes.

Satz 6.2.5. *Es seien $k \in \{1, \dots, x-1\}$ und $r = kp - 1$. Falls die Dimension von D_r durch p , aber nicht durch p^2 teilbar ist, so sind die Vertizes von D_r genau die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n .*

Beweis. Es seien also $k \in \{1, \dots, x-1\}$ und $r = kp - 1$. Ferner sei P ein Vertex von D_r mit $P \leq P_n$. Da $\dim_F(D_r)$ nach Voraussetzung nicht durch p^2 teilbar ist, gilt dann $|P_n : P| \in \{1, p\}$ nach Satz 2.2.10 (ii). Nach Korollar 6.1.7 existiert weiter ein $g \in \mathfrak{S}_n$ mit

$${}^g(P_{(x-k-1)p} \times P_{(k-1)p}) =: Q < P \leq P_n. \quad (*)$$

Wir nehmen $P \neq P_n$ an. Dann ist also $|P_n : P| = p$. Nach Bemerkung 3.5.3 gilt einerseits $\langle (1, \dots, p)(p+1, \dots, 2p) \cdots (n-p+1, \dots, n) \rangle \leq Z(P_n) \leq P$. Andererseits ist $(x-k-1)p \geq p$ oder $(k-1)p \geq p$, so dass P und damit auch P_n wegen $(*)$ eine zu P_p konjugierte Untergruppe besitzt. Nach Bemerkung/Korollar 3.1.6 bedeutet das, dass noch mindestens einer der p -Zyklen $(1, \dots, p), (p+1, \dots, 2p), \dots, (n-p+1, \dots, n)$ in P enthalten sein muss. Ist also $((j-1)p+1, \dots, jp) \in P$ für ein $j \in \{1, \dots, x\}$, so setzen wir $z := (1, \dots, p) \cdots (n-p+1, \dots, n)((j-1)p+1, \dots, jp)^{-1}$ und $C := \langle z \rangle$, so dass $C \leq P$ folgt. Ferner sei wieder $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ die aus allen $(n-1, 1)$ -Tabloiden bestehende F -Basis von M . Nach Bemerkung 6.1.1 bildet dann $\mathfrak{B}_{jp, jp-1} = \{\overline{b_i - b_{jp}} \mid i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{jp, jp-1\}\}$ eine F -Basis von D , wobei $\overline{b_i - b_{jp}}$ jeweils wieder die Restklasse von $b_i - b_{jp}$ modulo des von $\sum_{l=1}^n b_l$ aufgespannten trivialen Untermoduls von M bezeichne. Wir können nun o.B.d.A. $j = x$ annehmen und setzen $w_i := \overline{b_i - b_n}$ für $i = 1, \dots, n-2$. Dann folgt:

$$zw_i = \begin{cases} w_{i+1} & , \text{ falls } i \leq n-p \text{ und } i \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ w_{i+1-p} & , \text{ falls } i \leq n-p \text{ und } i \equiv 0 \pmod{p}, \\ w_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie in Bemerkung 6.1.8 (b) sei wieder $\{T_1, \dots, T_p\}$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen unzerlegbarer FC -Moduln, so dass $\dim_F(T_i) = i$ für $i = 1, \dots, p$ gilt. Nach obigen Überlegungen ist also

$$\text{Res}_C^{\mathfrak{S}_n}(D) \cong (p-2)T_1 \oplus mT_p$$

mit $m = \frac{n-p}{p}$. Nach Bemerkung 6.1.8 (a) erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \text{Res}_C^{\mathfrak{S}_n}(D_r) &= \text{Res}_C^{\mathfrak{S}_n}(\bigwedge^r D) \cong \bigwedge^r \text{Res}_C^{\mathfrak{S}_n}(D) \cong \bigwedge^{kp-1} ((p-2)T_1 \oplus mT_p) \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^{kp-1} \left[\bigwedge^i ((p-2)T_1) \otimes \bigwedge^{kp-1-i} (mT_p) \right] \\ &= \bigoplus_{i=0}^{p-2} \left[\bigwedge^i ((p-2)T_1) \otimes \bigwedge^{kp-1-i} (mT_p) \right], \end{aligned}$$

denn für $i > p - 2$ ist $\bigwedge^i((p-2)T_1) = 0$. Für $i \in \{0, \dots, p-2\}$ ist weiter $kp - i - 1 \in \{(k-1)p + 1, \dots, (k-1)p + (p-1)\}$. Folglich ist $\bigwedge^{kp-1-i}(mT_p)$ in diesen Fällen projektiv nach Lemma 6.1.9, und somit ist auch $\text{Res}_C^{\mathfrak{S}_n}(D_r)$ projektiv. Nach Satz 2.6.5 bedeutet dies, dass $c_C(\text{Res}_C^{\mathfrak{S}_n}(D_r)) = 0$ gilt. Also sind die Voraussetzungen von Satz 6.2.1 mit $q = p$, $H = P$, $X = C$ und $c = 0$ erfüllt, und es folgt

$$p^2 = |G : P|_p |C| \mid \dim_F(D_r),$$

im Widerspruch zu $\dim_F(D_r) \not\equiv 0 \pmod{p^2}$. Es muss demzufolge $P = P_n$ gelten, und die Behauptung des Satzes ist bewiesen. \square

Bemerkung 6.2.6. Der obige Satz schließt den Fall $k = 1$, $x \not\equiv 1 \pmod{p}$ ein. Dann ist $D_r \cong D^{(n-p+1, 1^{p-1})}$ und hat die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n als Vertizes. Im Fall $x \equiv 1 \pmod{p}$ lassen sich die Vertizes von D_{p-1} mit dieser Methode nicht bestimmen. Es gilt jedoch das folgende Lemma.

Lemma 6.2.7. *Es seien $n = a_1p + a_2p^2 + \dots + a_sp^s$ die p -adische Entwicklung von n mit $a_1, a_2 > 0$ sowie $r := a_1p - 1$. Dann sind die Vertizes von D_r entweder die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n oder in \mathfrak{S}_n konjugiert zu $(P_{p^s})^{a_s} \times \dots \times (P_{p^3})^{a_3} \times (P_{p^2})^{a_2-1} \times (P_p)^{a_1+p} \leq P_n$.*

Beweis. Es sei dazu P ein Vertex von D_r mit $P \leq P_n$. Nach Korollar 6.1.7 existiert dann ein $g \in \mathfrak{S}_n$ mit

$$g((P_{p^s})^{a_s} \times \dots \times (P_{p^3})^{a_3} \times (P_{p^2})^{a_2-1} \times (P_p)^{a_1+p-2}) =: Q \leq P \leq P_n,$$

und nach Voraussetzung ist $P_n = (P_{p^s})^{a_s} \times \dots \times (P_{p^3})^{a_3} \times (P_{p^2})^{a_2} \times (P_p)^{a_1}$. Es ist also $|P_n : Q| = p^3$. Da D_r nicht relativ \mathfrak{S}_{n-1} -projektiv ist, folgt zunächst $Q \neq P$ und somit $|P_n : P| \in \{1, p, p^2\}$. Weiter können wir wegen Bemerkung/Korollar 3.1.6 (ii) annehmen, dass

$$g(P_p)^{a_1+p-2} \leq B \times \langle (n - a_1p + 1, \dots, n - (a_1 - 1)p) \rangle \times \dots \times \langle (n - p + 1, \dots, n) \rangle \quad (**)$$

gilt. Dabei bezeichne B die Basisgruppe der zu P_{p^2} konjugierten Untergruppe von P_n , die auf den Zahlen $n - p^2 - a_1p + 1, \dots, n - a_1p$ operiert. Wegen $Z(P_n) \leq P$ müssen die p -Zyklen $(n - a_1p + 1, \dots, n - (a_1 - 1)p), \dots, (n - p + 1, \dots, n)$ alle in P enthalten sein. Falls mindestens einer von diesen nicht bereits in Q enthalten ist, folgt mit $(**)$ sofort, dass entweder $P = P_n$ oder $P = (P_{p^s})^{a_s} \times \dots \times (P_{p^3})^{a_3} \times (P_{p^2})^{a_2-1} \times (P_p)^{a_1+p}$ ist. Im Fall $\{(n - a_1p + 1, \dots, n - (a_1 - 1)p), \dots, (n - p + 1, \dots, n)\} \subset Q$ können wir wegen Bemerkung/Korollar 3.1.6 und $Z(P_n) \leq P$ annehmen, dass $R := (P_{p^s})^{a_s} \times \dots \times (P_{p^3})^{a_3} \times (P_{p^2})^{a_2-1} \times R_1 \leq P$ gilt. Dabei wird R_1 von den folgenden Elementen erzeugt:

$$\begin{aligned} &(n - p^2 - a_1p + 1, \dots, n - p^2 - (a_1 - 1)p), \dots, (n - (a_1 + 3)p + 1, \dots, n - (a_1 + 2)p), \\ &(n - (a_1 + 2)p + 1, \dots, n - (a_1 + 1)p)(n - (a_1 + 1)p + 1, \dots, n - a_1p), \\ &(n - a_1p + 1, \dots, n - (a_1 - 1)p), \dots, (n - p + 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Wegen $|P_n : R| = p^2$ und $C_{P_n}(R) \not\leq R$ folgt daraus zunächst, dass $|P_n : P| \in \{1, p\}$ gelten muss. Die einzige Untergruppe von P_n , die R enthält und Index p in P_n hat, ist aber $(P_{p^s})^{a_s} \times \dots \times (P_{p^3})^{a_3} \times (P_{p^2})^{a_2-1} \times (P_p)^{a_1+p}$, so dass auch in diesem Fall die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 6.2.8. Das Lemma zeigt also insbesondere, dass im Fall $x \equiv 1 \pmod{p}$ und $a_1 = 1$ die Vertizes von $D^{(n-p+1, 1^{p-1})}$ entweder die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n oder in \mathfrak{S}_n zu $(P_{p^s})^{a_s} \times \dots \times (P_{p^3})^{a_3} \times (P_{p^2})^{a_2-1} \times (P_p)^{p+1}$ konjugiert sind. So hat also zum Beispiel für $p = 3$ und $n = 12$ der irreduzible Modul $D_2 \cong D^{(10, 1^2)}$ entweder Vertex $P_{12} = P_9 \times P_3$ oder Vertex $(P_3)^4$. Computerberechnungen zeigen, dass D_2 tatsächlich Vertex P_{12} hat.

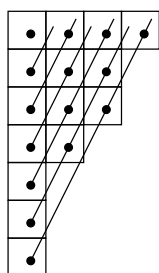
6.3 Regularisierungen

Bemerkung 6.3.1. Wir werden nun abschließend die Parameter der irreduziblen Moduln D_r aus vorigem Abschnitt bestimmen, d.h. diejenigen p -regulären Partitionen μ_r von n mit $D_r \cong D^{\mu_r}$ für $r \in \{0, \dots, n-1\}$, falls $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist, beziehungsweise $r \in \{0, \dots, n-2\}$, falls $n \equiv 0 \pmod{p}$ ist. Es gelten dabei nach wie vor die Bezeichnungen aus Bemerkung 6.1.1.

Außerdem werden wir den in [40] eingeführten Begriff der **Regularisierung** einer Partition benötigen. Es seien dazu $n \in \mathbb{N}^*$, K ein Körper der Charakteristik $q > 0$ und λ eine Partition von n mit Young-Diagramm $[\lambda]$ und q -Restediagramm $[\lambda]_q$. Unter einer **Leiter** $L_i(\lambda)$ verstehen wir in diesem Zusammenhang eine Strecke zwischen dem Knoten $(i, 1)$ und dem Punkt $(1, (i-1)(q-1)^{-1} + 1)$. Diese Leitern haben also Steigung $q-1$. Ferner liegt jeder Knoten von $[\lambda]$ auf einer Leiter, und alle Knoten, die auf einer gemeinsamen Leiter liegen, haben denselben q -Rest.

Beispiel.

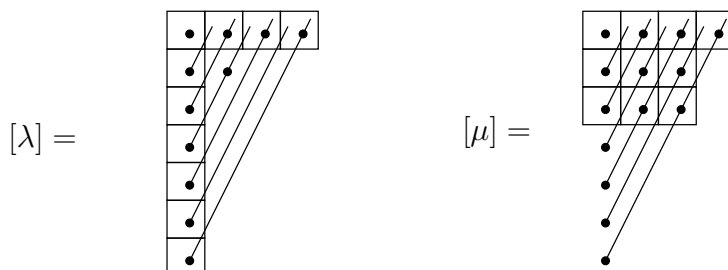
Für $q := 3$, $n = 15$, $\lambda := (4, 3^2, 2, 1^3)$ haben die entsprechenden Leitern die folgende Gestalt:



Eine Partition λ von n ist genau dann q -regulär, wenn für jede Leiter die Schnittknoten mit $[\lambda]$ die obersten der Leiter sind.

Beispiel.

Betrachten wir den Fall $q = 3$, $n = 10$, $\lambda := (4, 1^6)$, $\mu := (4, 3^2)$, so ist μ eine q -reguläre Partition, λ dagegen nicht. Die Leitern sehen wie folgt aus:



Hierbei hat etwa die Leiter $L_4(\lambda)$ genau einen Schnittknoten mit $[\lambda]$, nämlich $(4, 1)$. Dieser ist jedoch nicht der oberste Knoten der Leiter, sondern $(2, 2)$.

Wir wenden nun das Verfahren aus [40], 6.3.48 an. Für jede Leiter $L_i(\lambda)$ von $[\lambda]$, die $[\lambda]$ in genau $s_i(\lambda)$ Knoten schneidet, ersetzen wir die obersten Knoten der Leiter durch genau diese Schnittknoten. D.h., wir verschieben alle $s_i(\lambda)$ Schnittknoten so weit wie möglich auf $L_i(\lambda)$ nach oben. Auf diese Weise erhalten wir das Young-Diagramm einer q -regulären Partition μ von n . Diese bezeichnen wir mit λ^R und nennen sie die **Regularisierung** von λ . So ist in obigem Beispiel etwa $\lambda^R = (4, 1^6)^R = (4, 3^2) = \mu$. Dabei können verschiedene Partitionen durchaus die gleiche Regularisierung haben. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Satz 6.3.2 ([40], 6.3.51). Es seien λ eine Partition von n und $\mu = \lambda^R$. Dann ist $[S^\lambda : D^\mu] = 1$. Gilt ferner $[S^\lambda : D^\alpha] > 0$ für eine q -reguläre Partition $\alpha \neq \mu$ von n , so ist $\alpha \triangleright \mu$.

Wir wenden dies nun auf den Fall an, dass $q = p$ und λ eine Hakenpartition, d.h. von der Form $\lambda = (n - r, 1^r)$ für ein $r \in \{p, \dots, n - 1\}$ ist. Dann gilt:

Lemma 6.3.3. *Sind $r \in \{p, \dots, n - 1\}$ sowie $n = xp + y$ für ein $x \geq 1$ und $y \in \{0, \dots, p - 1\}$, so gilt*

$$(n - r, 1^r)^R = \begin{cases} \left(p^{1 + \lfloor \frac{r-p+1}{p-1} \rfloor}, 1 + \overline{r}, 1^{n-r-2 - \lfloor \frac{r-p+1}{p-1} \rfloor} \right)' & , \text{ falls } n - r \geq x + 1 \\ \left(p^{n-r-1}, (p-1)^{1 + \lfloor \frac{rp-n(p-1)+1}{p-1} \rfloor}, r+1 \right)' & , \text{ falls } x \geq n - r \geq 2 \\ \left((p-1)^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}, \bar{n} \right)' & , \text{ falls } n - r = 1. \end{cases}$$

Dabei sei \overline{m} stets die Restklasse von m modulo $p - 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es seien also n und r wie oben, und wir setzen $\lambda := (n - r, 1^r)$. Weiter betrachten wir die Leitern $L_1(\lambda), \dots, L_{r+1}(\lambda)$. Die erste dieser Leitern, deren Schnittknoten mit $[\lambda]$ nicht die obersten der Leiter sind, ist $L_{p+1}(\lambda)$. Es liegt nämlich $(2, 2)$ auf $L_{p+1}(\lambda)$. Um nun die Regularisierung von λ zu erhalten, müssen wir also die Knoten $(p + 1, 1), \dots, (r + 1, 1)$ auf den entsprechenden Leitern $L_{p+1}(\lambda), \dots, L_{r+1}(\lambda)$ so weit wie möglich nach oben verschieben.

Für $n - r \geq x + 1$ verfahren wir nun wie folgt. Wir schieben auf den Leitern $L_{p+1}(\lambda), \dots, L_{r+1}(\lambda)$ die jeweiligen Schnittknoten mit $[\lambda]$ stufenweise nach oben, so weit wie möglich. Im ersten Schritt rücken also die Knoten $(p + 1, 1), \dots, (r + 1, 1)$ alle jeweils eine Stufe auf den entsprechenden Leitern nach oben. Wir erhalten dadurch ein uneigentliches Diagramm der folgenden Form:

$$[\lambda]^{(1)} =$$

Die ersten p Knoten der zweiten Spalte können auf ihren Leitern nicht weiter nach oben verschoben werden. D.h., im zweiten Schritt rücken ab dem $(p + 1)$ -ten alle Knoten der zweiten Spalte von $[\lambda]^{(1)}$ auf ihren Leitern nach oben. Wir erhalten:

$$[\lambda]^{(2)} =$$

Dieses Verfahren iterieren wir. Offenbar werden dabei im j -ten Schritt genau die Knoten unterhalb der p -ten Zeile von $[\lambda]^{(j-1)}$ um eine Stufe auf ihren Leitern nach oben bewegt. Insgesamt

Wir betrachten nun den Fall $2 \leq n - r \leq x$. Zunächst können wir auch hier so verfahren wie im vorigen Fall. Nach dem $(n - r - 1)$ -ten Schritt erhalten wir dann:

Für $j \geq n - r$ werden im j -ten Schritt nun also ab dem p -ten alle Knoten der j -ten Spalte von $[\lambda]^{(j-1)}$ auf ihren Leitern nach oben verschoben. Insgesamt werden somit höchstens $n - r - 1 + \lfloor \frac{r-(p-2)-(n-r-1)(p-1)}{p-1} \rfloor + 1$ Schritte benötigt, um aus $[\lambda]$ das Diagramm einer p -regulären Partition zu konstruieren. Die ersten $n - r - 1 \geq 1$ Spalten dieses Diagramms haben Länge p . Die nachfolgenden $\lfloor \frac{r-(p-2)-(n-r-1)(p-1)}{p-1} \rfloor + 1$ Spalten haben Länge $p - 1$, und die letzte Spalte hat Länge $\overline{(r - (p - 2) - (n - r - 1)(p - 1))} = \overline{r + 1}$. Man beachte, dass wegen $n - r \leq x$ in diesem Fall tatsächlich $(n - r - 1)p < (x - 1)p < n$ gilt.

Im Fall $r = n - 1$ ist $\lambda = (1^n)$. Wir müssen für $j \geq 1$ somit im j -ten Schritt stets alle Knoten unterhalb der $(p - 1)$ -ten Zeile der j -ten Spalte von $[\lambda]^{(j-1)}$ nach oben verschieben. Dabei sei $[\lambda]^{(0)} := [\lambda]$. Demzufolge ist $(1^r)^R = \left((p - 1)^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}, \bar{n} \right)'$.

Damit ist das Lemma bewiesen.

Bemerkung 6.3.4. (a) Unter den Voraussetzungen von Lemma 6.3.3 und $y = 0$ ist stets $(x + 1, 1^{xp-x-1})^R = (x + 1, x^{p-2}, x - 1) = (x, 1^{xp-x})^R$. Wegen $xp - x - 1 - p + 1 = (x - 2)(p - 1) + p - 2$ ist für $n - r = x + 1$ nämlich

$$\begin{aligned} 1 + \left\lfloor \frac{r-p+1}{p-1} \right\rfloor &= x-1 \\ 1 + \bar{r} &= p-1 \\ n-r-2 - \left\lfloor \frac{r-p+1}{p-1} \right\rfloor &= x+1-2-x+2=1. \end{aligned}$$

Also ist in dem Fall $(x+1, 1^{xp-x-1})^R = (p^{x-1}, p-1, 1)' = (x+1, x^{p-2}, x-1)$.

Für $n - r = x$ ist andererseits

$$\begin{aligned} n - r - 1 &= x - 1 \\ \left\lfloor \frac{r - (p - 2) - (n - r - 1)(p - 1)}{p - 1} \right\rfloor + 1 &= \left\lfloor \frac{1}{p - 1} \right\rfloor + 1 = 1 \\ \overline{r + 1} &= 1. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich auch $(x, 1^{xp-x})^R = (p^{x-1}, p - 1, 1)' = (x + 1, x^{p-2}, x - 1)$. Alle anderen Regularisierungen sind paarweise verschieden.

- (b) Im Fall $y > 0$ sind alle Regularisierungen paarweise verschieden. Nach Satz 6.3.2 ist insbesondere $S^{(n-r, 1^r)} \cong D^{(n-r, 1^r)^R}$ für alle $r = 0, \dots, n - 1$.

Lemma 6.3.5. *Es seien $n = xp$, $x \geq 1$ und $r \in \{1, \dots, n - 2\}$.*

(i) *Falls $n - r \geq x + 1$ oder $r < p$ ist, so gilt:*

$$\begin{aligned} \text{Hd}(S^{(n-r, 1^r)}) &\cong D^{(n-r, 1^r)^R}, \\ \text{Soc}(S^{(n-r, 1^r)}) &\cong D^{(n-r+1, 1^{r-1})^R}. \end{aligned}$$

(ii) *Falls $n - r \leq x$ und $r \geq p$ ist, so gilt:*

$$\begin{aligned} \text{Hd}(S^{(n-r, 1^r)}) &\cong D^{(n-r-1, 1^{r+1})^R}, \\ \text{Soc}(S^{(n-r, 1^r)}) &\cong D^{(n-r, 1^r)^R}. \end{aligned}$$

(iii) *Ferner ist $S^{(n)} \cong D^{(n)}$ und $S^{(1^n)} \cong D^{(1^n)^R}$.*

Beweis. Die Moduln $S^{(n)}$ und $S^{(1^n)}$ sind irreduzibel, so dass die Behauptung (iii) aus Satz 6.3.2 folgt. Die restlichen Spechtmoduln zu Hakenpartitionen sind nach Bemerkung 6.1.1 einreihig mit genau zwei Kompositionsfaktoren, und nach [17], Cor. 5.5 ist $\text{Hd}(S^{(n-r, 1^r)}) \cong \text{Soc}(S^{(n-r-1, 1^{r+1})})$ für $0 \leq r \leq n - 1$. Damit ist die Behauptung im Fall $r < p$ klar. Für $r \geq p$ gilt nach Lemma 6.3.3 und Bemerkung 6.3.4 stets

$$\begin{aligned} (n - r, 1^r)^R &\triangleright (n - r - 1, 1^{r+1})^R, \text{ falls } n - r > x + 1 \text{ ist,} \\ (n - r, 1^r)^R &= (n - r - 1, 1^{r+1})^R, \text{ falls } n - r = x + 1 \text{ ist,} \\ (n - r - 1, 1^{r+1})^R &\triangleright (n - r, 1^r)^R, \text{ falls } n - r < x + 1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Nach Satz 6.3.2 ist $D^{(n-r, 1^r)^R}$ einer der Kompositionsfaktoren von $S^{(n-r, 1^r)}$, und der andere ist von der Form D^α mit $\alpha \triangleright (n - r, 1^r)^R$. Aus diesen Überlegungen folgt die Behauptung im Fall $r \geq p$, und das Lemma ist bewiesen. \square

Korollar 6.3.6. (i) *Für $n = xp$, $x \geq 1$ und $r \in \{0, \dots, n - 2\}$ gilt:*

$$D_r = \bigwedge^r D \cong \begin{cases} D^{(n-r, 1^r)^R} & , \text{ falls } n - r \geq x + 1 \text{ oder } r < p, \\ D^{(n-r-1, 1^{r+1})^R} & , \text{ falls } n - r \leq x \text{ und } r \geq p. \end{cases}$$

(ii) *Falls $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist, so gilt für alle $r \in \{0, \dots, n - 1\}$:*

$$D_r \cong S^{(n-r, 1^r)} \cong D^{(n-r, 1^r)^R}.$$

Kapitel 7

Moduln kleiner Dimensionen

Wir werden im Folgenden die Vertizes aller irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen der Dimensionen ≤ 1000 bestimmen. Dazu seien $n \in \mathbb{N}^*$ und F ein Körper von Primzahlcharakteristik p . Ferner bezeichnen wir ab jetzt für jedes $m = 0, \dots, n$ mit $R_n(m)$ die Klasse irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln D mit der Eigenschaft, dass $D \cong D^\mu$ oder $D \cong D^\mu \otimes S^{(1^n)} \cong D^{\mathbf{m}(\mu)}$ für ein $\mu \in \mathcal{P}_{n,p}$ mit $\mu_1 \geq n-m$ gilt. Dann wird der folgende Satz eine zentrale Rolle für unsere weiteren Überlegungen spielen.

Satz 7.0.1 ([38] L.4). *Es seien $m, N \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto f(n)$ eine Funktion, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- (i) $2f(n-2) > f(n)$ für alle $n \geq N+2$.
- (ii) Sind $n \in \{N, N+1\}$ und D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, dann liegt D entweder in $R_n(m)$, oder es ist $\dim(D) > f(n)$.
- (iii) Für alle $n \geq N$ und jeden irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Modul D in $R_n(m+2) \setminus R_n(m)$ ist $\dim(D) > f(n)$.

Für alle $n \geq N$ liegt dann jeder irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul D entweder in $R_n(m)$, oder es ist $\dim(D) > f(n)$.

Bemerkung 7.0.2. Um obigen Satz anwenden zu können, werden wir im Verlauf dieses Kapitels die Dimensionen der irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln für $p = 2$ und $n \leq 18$ sowie für $p = 3$ und $n \leq 17$ benötigen. Sowohl im Fall $p = 2$ als auch im Fall $p = 3$ sind die **Zerlegungszahlen** von \mathfrak{S}_n für alle $n \leq 17$ bekannt [siehe <http://www.math.rwth-aachen.de/homes/MOC/decomposition/>]. Dabei gibt die Zerlegungszahl $d_{\mu\lambda}$ an, mit welcher Vielfachheit der irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul D^λ als Kompositionsfaktor des Spechtmoduls S^μ vorkommt. Da die Dimensionen der Spechtmoduln stets bekannt sind, lassen sich mit Hilfe der Zerlegungszahlen auch die Dimensionen der irreduziblen Moduln bestimmen. Dies liegt daran, dass die Zerlegungsmatrix $(d_{\mu\lambda})_{\mu \in \mathcal{P}_n, \lambda \in \mathcal{P}_{n,p}}$ stets vollen Rang hat. Da für $n \geq 18$ Zerlegungszahlen nur noch in Spezialfällen vorliegen, sind dann auch die Dimensionen der irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln im Allgemeinen nicht bekannt. Die Tabelle aus Anhang A enthält jedoch untere Schranken für die Dimensionen der irreduziblen $F\mathfrak{S}_{18}$ -Moduln in Charakteristik 2.

Insbesondere erhalten wir auf diese Weise, dass im Fall $p = 2$ jeder irreduzible $F\mathfrak{S}_{17}$ -Modul entweder in $R_{17}(3) \cup \{D^{(9,8)}\}$ liegt oder Dimension ≥ 1582 hat und, dass jeder irreduzible $F\mathfrak{S}_{18}$ -Modul entweder in $R_{18}(3) \cup \{D^{(10,8)}\}$ liegt oder Dimension ≥ 1582 hat. Ferner haben alle Moduln in $R_{17}(3) \cup \{D^{(9,8)}\}$ Dimensionen < 1155 , und die Moduln in $R_{18}(3) \cup \{D^{(10,8)}\}$ haben Dimensionen < 1580 . Im Fall $p = 3$ und $n \in \{16, 17\}$ liegt jeder irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul entweder in $R_n(3)$ oder hat Dimension ≥ 1260 beziehungsweise ≥ 1597 . Ferner haben die Moduln in $R_{16}(3)$ Dimensionen < 819 , und die Moduln in $R_{17}(3)$ haben Dimensionen < 1155 .

7.1 Irreduzible Moduln in Charakteristik 3

Wir betrachten zunächst den Fall $p = 3$. Dann gilt folgendes Lemma:

Lemma 7.1.1. *Es seien $N := 16$ und $m := 3$. Ferner setzen wir*

$$f(n) := \frac{n^4 - 14n^3 + 47n^2 - 34n - 24}{24}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- (i) $2f(n-2) > f(n)$ für $n \geq 18$.
- (ii) Sind $n \in \{16, 17\}$ und D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, so liegt D entweder in $R_n(3)$, oder es ist $\dim(D) > f(n)$.
- (iii) Sind $n \geq 16$ und D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul in $R_n(m+2) \setminus R_n(m)$, so gilt $\dim(D) > f(n)$.

Beweis. (i): Eine Routinerechnung zeigt, dass $n^4 - 30n^3 + 263n^2 - 810n + 744 > 0$ für alle $n \geq 18$ gilt, woraus sofort die Behauptung folgt.

(ii): Es ist $f(16) = 819$ und $f(17) = 1155$. Die Behauptung folgt dann aus Bemerkung 7.0.2.

(iii): Es seien $n \geq 16$ und D^λ ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul aus $R_n(5) \setminus R_n(3)$.

(a) Im Fall $D^\lambda \in R_n(4) \setminus R_n(3)$ können wir $\lambda \in \{(n-4, 4), (n-4, 3, 1), (n-4, 2^2), (n-4, 2, 1^2)\}$ annehmen. Nach [38] ist:

$$\begin{aligned} \dim(D^{(n-4,4)}) &\geq \frac{n^4 - 14n^3 + 47n^2 - 34n}{24} = f(n) + 1 > f(n), \\ \dim(D^{(n-4,3,1)}) &\geq \frac{3n^4 - 38n^3 + 129n^2 - 118n}{24} > f(n), \\ \dim(D^{(n-4,2^2)}) &\geq \frac{n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120}{24} > f(n), \\ \dim(D^{(n-4,2,1^2)}) &\geq \frac{3n^4 - 38n^3 + 153n^2 - 190n - 24}{24} > f(n). \end{aligned}$$

(b) Wir betrachten nun den Fall $D^\lambda \in R_n(5) \setminus R_n(4)$ und können $\lambda \in \{(n-5, 5), (n-5, 4, 1), (n-5, 3, 2), (n-5, 3, 1^2), (n-5, 2^2, 1)\}$ annehmen.

$$\boxed{\lambda = (n-5, 3, 2)}$$

Nach Korollar 6.3.6 und Lemma 6.3.3 gilt stets $\lambda = (n-5, 1^5)^R$, und es ist

$$\dim(D^\lambda) = \begin{cases} \binom{n-1}{5} & , \text{ falls } n \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \binom{n-2}{5} & , \text{ falls } n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

In beiden Fällen gilt somit $\dim(D^\lambda) > f(n)$. Für $\lambda \in \{(n-5, 5), (n-5, 4, 1), (n-5, 3, 1^2), (n-5, 2^2, 1)\}$ betrachten wir zunächst die Fälle $n = 16, 17, 18$. Nach Bemerkung 7.0.2 ist die Behauptung (iii) für $n = 16, 17$ richtig. Es sei also $n = 18$. Dann ist $f(n) = 1580$. Die modularen Branching-Regeln aus Bemerkung 4.1.4 und Satz 4.1.5 liefern außerdem Folgendes:

- $2D^{(12,4)} \mid \text{Res}_{\mathfrak{S}_{16}}^{\mathfrak{S}_{18}}(D^{(13,5)})$
- $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{17}}^{\mathfrak{S}_{18}}(D^{(13,4,1)}) \cong D^{(12,4,1)} \oplus D^{(13,3,1)}$
- $2D^{(12,3,1)} \mid \text{Res}_{\mathfrak{S}_{16}}^{\mathfrak{S}_{18}}(D^{(13,3,1^2)})$
- $2D^{(12,2^2)} \mid \text{Res}_{\mathfrak{S}_{16}}^{\mathfrak{S}_{18}}(D^{(13,2^2,1)})$.

Dies zeigt, dass $\dim(D^\lambda) > 1580 = f(18)$ für $\lambda \in \{(13, 5), (13, 4, 1), (13, 3, 1^2), (13, 2^2, 1)\}$ gilt. Die restlichen Fälle beweisen wir nun induktiv und nehmen ab jetzt $n > 18$ an. Ferner benutzen wir wieder die modularen Branching-Regeln aus Bemerkung 4.1.4 und Satz 4.1.5.

$$\lambda := (n-5, 5)$$

Im Fall $n \equiv 1 \pmod{3}$ ist $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) \cong D^{(n-1-5,5)} \oplus D^{(n-1-4,4)}$, so dass nach Induktion, (i) und (a) dann $\dim(D^\lambda) = \dim(D^{(n-1-5,5)}) + \dim(D^{(n-1-4,4)}) > 2f(n-1) > 2f(n-2) > f(n)$ folgt.

Im Fall $n \equiv 2 \pmod{3}$ ist $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) \cong D^{(n-1-5,5)}$. Wegen $n-1 \equiv 1 \pmod{3}$ ist nach den obigen Überlegungen $\dim(D^\lambda) = \dim(D^{(n-1-5,5)}) > 2f(n-1-1) = 2f(n-2) > f(n)$. Ist $n \equiv 0 \pmod{3}$, so besitzt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ zwei zu $D^{(n-2-4,4)}$ isomorphe direkte Summanden, d.h. nach (a) ist $\dim(D^\lambda) \geq 2\dim(D^{(n-2-4,4)}) > 2f(n-2) > f(n)$.

$$\lambda := (n-5, 4, 1)$$

Für $n \equiv 1 \pmod{3}$ besitzt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ zwei zu $D^{(n-2-4,4)}$ isomorphe direkte Summanden, und mit (a) folgt $\dim(D^\lambda) \geq 2\dim(D^{(n-2-4,4)}) > 2f(n-2) > f(n)$.

Im Fall $n \equiv 2 \pmod{3}$ kommen in $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ die Moduln $D^{(n-1-4,4)}$ und $D^{(n-1-4,3,1)}$ als Kompositionsfaktoren vor, und nach (a) erhalten wir auch hier $\dim(D^\lambda) > 2f(n-1) > 2f(n-2) > f(n)$.

Ist $n \equiv 0 \pmod{3}$, so gilt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) \cong D^{(n-1-5,4,1)} \oplus D^{(n-1-4,3,1)}$, so dass nach (a) und Induktion $\dim(D^\lambda) > 2f(n-1) > 2f(n-2) > f(n)$ gilt.

$$\lambda := (n-5, 3, 1^2)$$

Im Fall $n \equiv 1 \pmod{3}$ hat $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ zwei zu $D^{(n-2-4,2,1^2)}$ isomorphe direkte Summanden. Wegen (a) ist also $\dim(D^\lambda) > 2f(n-2) > f(n)$.

Falls $n \equiv 2 \pmod{3}$ ist, gilt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) \cong D^{(n-1-5,3,1^2)} \oplus D^{(n-1-4,2,1^2)}$, so dass $\dim(D^\lambda) > 2f(n-1) > 2f(n-2) > f(n)$ nach (a) und Induktion folgt.

Im Fall $n \equiv 0 \pmod{3}$ schließlich besitzt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ zwei zu $D^{(n-2-4,3,1)}$ isomorphe direkte Summanden, und nach (a) folgt auch hier $\dim(D^\lambda) > 2f(n-2) > f(n)$.

$$\lambda := (n-5, 2^2, 1)$$

Für $n \equiv 1 \pmod{3}$ ist $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) \cong D^{(n-1-5,2^2,1)} \oplus D^{(n-1-4,2^2)}$, d.h. es ist $\dim(D^\lambda) > 2f(n-1) > 2f(n-2) > f(n)$ wegen (a) und Induktion.

Für $n \equiv 2 \pmod{3}$ besitzt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ zwei zu $D^{(n-2-4,2,1^2)}$ isomorphe direkte Summanden, und nach (a) ist dann $\dim(D^\lambda) > 2f(n-2) > f(n)$.

Im Fall $n \equiv 0 \pmod{3}$ besitzt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ zwei zu $D^{(n-2-4,2^2)}$ isomorphe direkte Summanden, so dass $\dim(D^\lambda) > 2f(n-2) > f(n)$ folgt.

Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Somit sind also die Voraussetzungen von Satz 7.0.1 mit $p = 3$, $N = 16$, $m = 3$ erfüllt, und zusammen mit den Ergebnissen aus Bemerkung 7.0.2 erhalten wir sofort:

Korollar 7.1.2. *Es seien $p = 3$, $n \geq 16$ und D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul. Dann liegt D in $R_n(3)$, oder es ist $\dim(D) > 1000$.*

Bemerkung 7.1.3. Für $n \leq 15$ kennen wir die Vertizes aller irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln in Charakteristik 3 der Dimension ≤ 1000 (siehe 9.2).

Die Moduln aus $R_n(1)$ sind gerade $D^{(n)}$, $D^{\mathbf{m}((n))}$, $D^{(n-1,1)}$, $D^{\mathbf{m}((n-1,1))}$. Die Vertizes dieser Moduln sind stets die Defektgruppen der entsprechenden Blöcke.

Nach [70], Satz 4.2.6 sind ferner die Vertizes von $D^{(n-2,2)}$ und damit auch von $D^{\mathbf{m}((n-2,2))}$ die Defektgruppen der entsprechenden Blöcke.

Die Vertizes von $D^{(n-3,3)}$ und $D^{\mathbf{m}((n-3,3))}$ sind nach [70], Satz 4.2.10 stets die 3-Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n , es sei denn, es ist $n \equiv 5 \pmod{9}$. Für $n \equiv 5 \pmod{9}$ ist aber $D^{(n-3,3)} \cong S^{(n-3,3)} \cong Y^{(n-3,3)}$, so dass die Vertizes auch in diesem Fall bekannt sind. Nach Bemerkung 5.3.3 und Satz 5.4.1 sind sie in \mathfrak{S}_n konjugiert zu $P_{n-6} \times P_3^2$.

Um nun die Vertizes aller irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen in Charakteristik 3 der Dimension ≤ 1000 zu bestimmen, müssen wir also noch Moduln der Form $D^{(n-2,1^2)}$ und $D^{(n-3,2,1)}$ für $n \geq 16$ betrachten. Im Fall $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ ist $D^{(n-2,1^2)} \cong S^{(n-2,1^2)}$ und $D^{(n-3,2,1)} \cong S^{(n-3,1^3)}$ nach Lemma 6.3.3 und Korollar 6.3.6. In diesen Fällen sind die Vertizes also bekannt. Sie sind nach Bemerkung 6.1.1 konjugiert zu P_{n-3} beziehungsweise $P_{n-4} \times P_3$. Nach Bemerkung 6.2.6 wissen wir auch, dass im Fall $n \equiv 0 \pmod{3}$ und $n \not\equiv 3 \pmod{9}$ die Vertizes von $D^{(n-2,1^2)}$ gerade die 3-Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n sind. Für $n \equiv 0 \pmod{3}$ gilt außerdem:

$$\dim(D^{(n-2,1^2)}) = \binom{n-2}{2} \text{ und } \dim(D^{(n-3,2,1)}) = \binom{n-2}{3}.$$

Es ist also $\dim(D^{(n-2,1^2)}) > 1000$ für $n > 45$ und $\dim(D^{(n-3,2,1)}) > 1000$ für $n > 21$. Ferner ist $\dim(D^{(15,2,1)}) = 560 \not\equiv 0 \pmod{3}$, und die Vertizes von $D^{(15,2,1)}$ sind damit die 3-Sylowgruppen von \mathfrak{S}_{18} . Demnach haben wir noch folgende Fälle zu betrachten:

n	λ	$\dim(D^\lambda)$
21	$(19, 1^2)$	$171 \equiv 0 \pmod{9}$
	$(18, 2, 1)$	$969 \equiv 0 \pmod{3}$
30	$(28, 1^2)$	$378 \equiv 0 \pmod{27}$
39	$(37, 1^2)$	$666 \equiv 0 \pmod{9}$

Computerberechnungen zeigen, dass in all diesen Fällen die Vertizes der entsprechenden irreduziblen Moduln stets die 3-Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n sind. Dabei wurden die Vertizes der Moduln $D^{(19,1^2)}$, $D^{(28,1^2)}$ und $D^{(37,1^2)}$ direkt mit den Computerprogrammen aus [70] berechnet.

Der irreduzible $F\mathfrak{S}_{21}$ -Modul $D^{(18,2,1)}$ ist nach Korollar 6.3.6 und Lemma 6.3.3 isomorph zu $D_3 = \bigwedge^3 D^{(20,1)}$. Betrachten wir nun einen Vertex $P \leq P_{21} = P_9 \times P_9 \times P_3$ von D_3 , so ist $P_9 \times (P_3)^3 <_{\mathfrak{S}_{21}} P \leq P_{21}$ nach Korollar 6.1.7. Wegen $Z(P_{21}) \leq P$ und Bemerkung/Korollar 3.1.6 folgt daraus sofort, dass entweder $P = P_{21}$ oder $P = P_9 \times (P_3)^4$ gelten muss. Wir nehmen zunächst $P = P_9 \times (P_3)^4$ an und setzen $H := N_{\mathfrak{S}_{21}}(P)$. Dann besitzt H für $S \in \text{Syl}_2(\mathfrak{S}_4)$ eine zu $N_{\mathfrak{S}_9}(P_9) \times (\mathfrak{S}_3 \wr S)$ isomorphe Untergruppe K , und es gilt $P \leq K \leq H$ sowie $|K : P| = 2^9 \not\equiv 0 \pmod{3}$. Ferner ist $\text{Res}_{\mathbb{F}_3 K}^{\mathbb{F}_3 \mathfrak{S}_{21}}(D_3)$ absolut unzerlegbar, wie Computerberechnungen zeigen. Wir können daher annehmen, dass F algebraisch abgeschlossen ist. Aus Korollar 2.4.6 folgt dann der Widerspruch $P = (P_3)^4 \in \text{Syl}_3(\mathfrak{S}_{21})$. Folglich ist $P = P_{21}$.

7.2 Irreduzible Moduln in Charakteristik 2

Nun betrachten wir den Fall $p = 2$. Mit $D(n)$ bezeichnen wir jetzt stets den **Spinmodul** für $F\mathfrak{S}_n$. Dies ist der irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul zur Partition $(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1)$, falls n gerade ist, beziehungsweise der zur Partition $(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2})$, falls n ungerade ist. Wir werden ein Analogon zu Satz 7.0.1 beweisen und benötigen hierfür noch folgendes Lemma.

Lemma 7.2.1. *Es seien $n \geq 8$ und $G = \mathfrak{S}_n$. Dann gilt:*

- (i) *Im Fall $n \equiv 0 \pmod{4}$ ist $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D(n)) \cong f_0(D(n)) \sim 2D(n+1) + D^{(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1, 1)}$ und $\dim(D^{(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1, 1)}) = (n-3)2^{\frac{n-2}{2}}$.*
- (ii) *Im Fall $n \equiv 1 \pmod{4}$ ist $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D(n)) \cong f_0(D(n)) \oplus f_1(D(n))$, wobei $f_0(D(n)) \sim 2D(n+1)$ und $f_1(D(n)) \cong D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)}$ gilt. Ferner ist $\dim(D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)}) = (n-1)2^{\frac{n-1}{2}}$.*

- (iii) Im Fall $n \equiv 2 \pmod{4}$ ist $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D(n)) \cong f_0(D(n)) \oplus f_1(D(n))$, wobei $f_1(D(n)) \cong D(n+1)$ und $f_0(D(n)) \cong D^{(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1, 1)}$ gilt. Ferner ist $\dim(D^{(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1, 1)}) = (n-1)2^{\frac{n-2}{2}}$.
- (iv) Im Fall $n \equiv 3 \pmod{4}$ ist $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D(n)) \cong f_0(D(n)) \sim 3D(n+1) + D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)}$ und $\dim(D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)}) = (n-2)2^{\frac{n-1}{2}}$.

Beweis. Wir beweisen die Aussagen mittels Induktion nach n und betrachten zunächst die Fälle $n = 8, 9, 10, 11$. Außerdem setzen wir jeweils $M := \text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D(n))$ für alle $n \geq 8$.

- $n = 8$
Es ist $D(8) = D^{(5,3)}$, und $(5, 3)$ hat reduzierte 0-Signatur $++-$. Ferner ist $D(9) = D^{(5,4)}$. Nach Satz 4.1.3 ist daher $[M : D^{(5,4)}] = 2$ und $[M : D^{(5,3,1)}] = 1$. Wegen $\dim(D^{(5,3,1)}) = 40 = 72 - 2 \cdot 16 = \dim(M) - 2 \dim(D(9))$ folgt die Behauptung.
- $n = 9$
Es ist $D(9) = D^{(5,4)}$, und $(5, 4)$ hat reduzierte 0-Signatur $+-$ und reduzierte 1-Signatur $++$. Außerdem ist $D(10) = D^{(6,4)}$. Nach Satz 4.1.3 ist also $[M : D^{(6,4)}] = 2$ und $[M : D^{(5,4,1)}] = 1$. Wegen $\dim(D^{(5,4,1)}) = 128 = 160 - 2 \cdot 16 = \dim(M) - 2 \dim(D(10))$ folgt auch hier die Behauptung.
- $n = 10$
In diesem Fall ist $D(10) = D^{(6,4)}$, und $(6, 4)$ hat reduzierte 0-Signatur $+$ und reduzierte 1-Signatur $+-$. Nach Satz 4.1.2 ist also $M \cong D^{(6,5)} \oplus D^{(6,4,1)}$, woraus (iii) für $n = 10$ folgt.
- $n = 11$
Schließlich ist $D(11) = D^{(6,5)}$, und $(6, 5)$ hat reduzierte 0-Signatur $+++$. Wegen Satz 4.1.3 ist demnach $[M : D^{(7,5)}] = 3$ und $[M : D^{(6,5,1)}] = 1$. Aus $\dim(D^{(6,5,1)}) = 288 = 384 - 3 \cdot 32 = \dim(M) - 3 \dim(D(12)) = \dim(M) - 3 \dim(D^{(7,5)})$ folgt auch in diesem Fall die Behauptung.

Wir können also ab jetzt $n \geq 12$ und, dass die Behauptung für $8 \leq k < n$ gilt, annehmen. Wir benutzen wieder die modularen Branching-Regeln und insbesondere Satz 4.1.3.

Für $n \equiv 0 \pmod{4}$ ist $D(n) = D^{(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1)}$, hat Dimension $2^{\frac{n-2}{2}}$ und reduzierte 0-Signatur $++-$. Nach Satz 4.1.3 ist somit $[M : D(n+1)] = 2$ und $[M : D^{(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1, 1)}] = 1$. Betrachten wir andererseits $D := D^{(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1, 1)}$, so hat dieser Modul reduzierte 0-Signatur $-$ und reduzierte 1-Signatur $++$. Nach Satz 4.1.2 ist also $\text{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D) \cong D^{(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1, 1)}$. Aus $n-1 \equiv 3 \pmod{4}$ und der Induktionsvoraussetzung folgt $\dim(D^{(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1, 1)}) = \dim(D^{(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1, 1)}) = (n-3)2^{\frac{n-2}{2}}$. Wegen $\dim(M) = (n+1)2^{\frac{n-2}{2}} = 2 \dim(D(n+1)) + \dim(D)$ folgt daraus die Aussage (i).

Im Fall $n \equiv 1 \pmod{4}$ ist $D(n) = D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2})}$, hat reduzierte 0-Signatur $+-$ und reduzierte 1-Signatur $++$, so dass nach Satz 4.1.3 hier $[M : D(n+1)] = 2$ und $[M : D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)}] = 1$ folgt. Wegen $\dim(M) = (n+1)2^{\frac{n-1}{2}}$ gilt also

$$\begin{aligned} \dim(D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)}) &\leq (n+1)2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \dim(D(n+1)) = (n+1)2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \\ &= (n-1)2^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Andererseits betrachten wir $D := D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)}$ und $\text{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D) =: L$. Da D reduzierte 0-Signatur $---$ und reduzierte 1-Signatur $+++$ hat, ist $[L : D(n)] = 3$ und $[L : D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-3}{2}, 1)}] = 2$. Nach Induktionsvoraussetzung ist somit

$$\begin{aligned} \dim(D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)}) &\geq 3 \dim(D(n)) + 2 \dim(D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-3}{2}, 1)}) \\ &= 3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} + 2(n-4)2^{\frac{n-3}{2}} = (n-1)2^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir (ii).

Es sei nun $n \equiv 2 \pmod{4}$. Dann ist $D(n) = D(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2})$, hat Dimension $2^{\frac{n-2}{2}}$ sowie reduzierte 0-Signatur $+$ und reduzierte 1-Signatur $+-$. Demzufolge ist M nach Satz 4.1.2 halbeinfach mit $M \cong D(n+1) \oplus D(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}-1)$. Wir erhalten somit $\dim(D(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}-1)) = \dim(M) - \dim(D(n+1)) = (n+1)2^{\frac{n-2}{2}} - 2^{\frac{n}{2}} = (n-1)2^{\frac{n-2}{2}}$, so dass (iii) folgt.

Schließlich sei $n \equiv 3 \pmod{4}$. Dann ist $D(n) = D(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2})$ mit reduzierter 0-Signatur $+++$ und reduzierter 1-Signatur $---$. Ferner ist $\dim(D(n)) = 2^{\frac{n-1}{2}}$. Wegen Satz 4.1.3 ist also $[M : D(n+1)] = 3$ und $[M : D(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}-1)] = 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dim(D(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}-1)) &\leq \dim(M) - 3 \dim(D(n+1)) = (n+1)2^{\frac{n-1}{2}} - 3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \\ &= (n-2)2^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Andererseits betrachten wir wieder $D := D(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}-1)$ und $L := \text{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D)$. Da D reduzierte 0-Signatur $+$ und reduzierte 1-Signatur $--$ hat, gilt $[L : D(\frac{n+1}{2}, \frac{n-3}{2}-1)] = 2$ wegen Satz 4.1.3. Da $n-1 \equiv 2 \pmod{4}$ ist, folgt nun aus der Induktionsvoraussetzung

$$\dim(D) = \dim(L) \geq 2 \dim(D(\frac{n+1}{2}, \frac{n-3}{2}-1)) = 2(n-2)2^{\frac{n-3}{2}} = (n-2)2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Somit ist auch (iv) bewiesen. □

Als direkte Folgerung aus obigem Lemma erhalten wir:

Korollar 7.2.2. *Es sei $n \geq 9$. Ferner sei $D = D(\frac{n+1}{2}, \frac{n-3}{2}-1)$, falls n ungerade ist, und $D = D(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}-1)$, falls n gerade ist. Dann gilt:*

$$\dim(D) = g(n) := \begin{cases} (n-3)2^{\frac{n-2}{2}} & , \text{ falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ (n-4)2^{\frac{n-3}{2}} & , \text{ falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ (n-2)2^{\frac{n-2}{2}} & , \text{ falls } n \equiv 2 \pmod{4} \\ (n-2)2^{\frac{n-3}{2}} & , \text{ falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Wir bezeichnen weiterhin mit $R_n(m)$ die zu Beginn dieses Kapitels eingeführte Klasse irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln für $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann gilt folgender Satz:

Satz 7.2.3. *Es seien $m, N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 9$. Ferner sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion, welche die folgenden Bedingungen erfüllt.*

- (i) *Es ist $f(n) > f(n-1)$ für $n \geq N+1$ und $2f(n-2) > f(n)$ für $n \geq N+2$.*
- (ii) *Für $n \in \{N, N+1\}$ liegt jeder irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul D in $R_n(m) \cup \{D(n)\}$, oder es ist $\dim(D) > f(n)$.*
- (iii) *Für alle $n \geq N+1$ ist $g(n) > 2f(n-1)$, wobei g die Funktion aus obigem Korollar sei.*
- (iv) *Für alle $n \geq N$ und $D \in R_n(m+2) \setminus R_n(m)$ ist $\dim(D) > f(n)$.*

Dann gehört für alle $n \geq N$ jeder irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul D zu $R_n(m) \cup \{D(n)\}$, oder es ist $\dim(D) > f(n)$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n . Wegen Bedingung (ii) gilt sie in den Fällen $n = N$, $n = N+1$. Wir können also ab jetzt $n \geq N+2$ annehmen. Es sei dann D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul mit $D \notin R_n(m)$ und $D \not\cong D(n)$. Wir müssen zeigen, dass dann $\dim(D) > f(n)$ gilt.

1.Fall: $L := \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D) \cong e_0(D) \oplus e_1(D)$ ist reduzibel.

- (1.1): L besitzt mindestens zwei Kompositionsfaktoren der Dimension $\geq f(n-1)$. Dann ist $\dim(D) = \dim(L) \geq 2f(n-1) > 2f(n-2) > f(n)$ nach (i).
- (1.2): L besitzt höchstens einen Kompositionsfaktor der Dimension $\geq f(n-1)$. Besitzt L genau einen solchen Kompositionsfaktor \tilde{D} , und kommt dieser im Sockel von L vor, so können wir annehmen, dass er im Sockel von $e_0(D)$ vorkommt. Dann ist also $\tilde{D} \cong \text{Soc}(e_0(D)) \cong \text{Hd}(e_0(D))$, und wegen $[e_0(D) : \tilde{D}] = 1$ folgt $e_0(D) \cong \tilde{D}$ nach Satz 4.1.2 (ii) und Satz 4.1.3 (i). Da L reduzibel ist, ist in diesem Fall $e_1(D) \neq 0$, und es gilt $\dim(\text{Soc}(e_1(D))) < f(n-1)$. Haben alle Kompositionsfaktoren von L Dimensionen $< f(n-1)$, so gilt dies insbesondere für diejenigen im Sockel. In jedem Fall besitzt L einen irreduziblen Untermodul \hat{D} der Dimension $< f(n-1)$. Somit ist D zu einem Kompositionsfaktor von $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(\hat{D})$ isomorph, und nach Induktion gilt $\hat{D} \in R_{n-1}(m) \cup \{D(n-1)\}$. Im Fall $\hat{D} \in R_{n-1}(m)$ ist $D \in R_n(m+1)$, woraus $\dim(D) > f(n)$ nach (iv) folgt. Im Fall $\hat{D} = D(n-1)$ gilt nach Lemma 7.2.1:

$$D \cong \begin{cases} D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-3}{2}, 1)} & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ D^{(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}, 1)} & , \text{ falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Also erhalten wir $\dim(D) = g(n) > 2f(n-1) > 2f(n-2) > f(n)$ nach Korollar 7.2.2, (i) und (iii).

2.Fall: $L := \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D)$ ist irreduzibel. Dann ist also $L \cong D^\mu$ für ein $\mu \in \mathcal{P}_{n-1,2}$.

In jedem Fall ist nach [38], L.3 aber $\tilde{L} := \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(D) \cong e_0(D^\mu) \oplus e_1(D^\mu)$ reduzibel.

- (2.1): \tilde{L} hat mindestens zwei Kompositionsfaktoren der Dimension $\geq f(n-2)$. Dann ist $\dim(D) = \dim(\tilde{L}) \geq 2f(n-2) > f(n)$ nach (i).
- (2.2): \tilde{L} hat höchstens einen Kompositionsfaktor der Dimension $\geq f(n-2)$. Wie im Fall (1.2) folgt dann, dass ein irreduzibler Untermodul $\hat{D} \in R_{n-2} \cup \{D(n-2)\}$ von \tilde{L} existiert, so dass D als Kompositionsfaktor von $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(\hat{D})$ auftritt. Im Fall $\hat{D} \in R_{n-2}(m)$ ist $D \in R_n(m+2)$, und es folgt $\dim(D) > f(n)$ nach (iv). Wir können also $\hat{D} = D(n-2)$ annehmen. Dann ist aber auch L isomorph zu einem Kompositionsfaktor von $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_{n-1}}(\hat{D})$. Nach Lemma 7.2.1 wissen wir, dass also entweder $L \cong D(n-1)$ oder

$$L \cong \begin{cases} D^{(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, 1)} & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ D^{(\frac{n}{2}, \frac{n-4}{2}, 1)} & , \text{ falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

ist. Im Fall $L \cong D(n-1)$ ist wegen $D \not\cong D(n)$ und Lemma 7.2.1 wiederum

$$D \cong \begin{cases} D^{(\frac{n+1}{2}, \frac{n-3}{2}, 1)} & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ D^{(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}, 1)} & , \text{ falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

d.h. $\dim(D) = g(n) > 2f(n-1) > 2f(n-2) > f(n)$ nach Korollar 7.2.2 und (i). Im anderen Fall ist $\dim(D) = \dim(L) = g(n-1) > 2f(n-2) > f(n)$ nach Korollar 7.2.2 und (i).

In jedem Fall gilt also $\dim(D) > f(n)$, und der Satz ist bewiesen. \square

Lemma 7.2.4. *Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 12$ und g die Funktion aus Korollar 7.2.2. Ferner setzen wir $h(n) := n^4 - 14n^3 + 47n^2 - 34n - 24$. Dann ist stets*

$$12g(n) > h(n-1) = n^4 - 18n^3 + 95n^2 - 174n + 72.$$

Beweis. Offenbar gilt die Behauptung für $n = 12, \dots, 19$. Durch eine Routinerechnung folgt die Behauptung für $n \geq 20$ dann induktiv. \square

Lemma 7.2.5. *Es seien $N := 17$ und $m := 3$. Ferner setzen wir*

$$f(n) := \frac{n^4 - 14n^3 + 47n^2 - 34n - 24}{24}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- (i) *Es ist $f(n) > f(n-1)$ für $n \geq 18$ und $2f(n-2) > f(n)$ für $n \geq 19$.*
- (ii) *Ist $n \in \{17, 18\}$ und D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, so liegt D entweder in $R_n(m) \cup \{D(n)\}$, oder es ist $\dim(D) > f(n)$.*
- (iii) *Für alle $n \geq 18$ ist $g(n) > 2f(n-1)$, wobei g wieder die Funktion aus Korollar 7.2.2 sei.*
- (iv) *Für alle $n \geq 17$ und $D \in R_n(m+2) \setminus R_n(m)$ ist $\dim(D) > f(n)$.*

Beweis. Die Aussage (i) haben wir bereits in Lemma 7.1.1 bewiesen. Weiter ist $f(17) = 1155$ und $f(18) = 1580$. Die Behauptung (ii) folgt dann aus Bemerkung 7.0.2. Aussage (iii) folgt direkt aus Lemma 7.2.4. Wir zeigen nun noch (iv). Es sei dazu $n \geq 17$.

(a) Wir betrachten zuerst den Fall $D^\lambda \in R_n(4) \setminus R_n(3)$, d.h. also $\lambda \in \{(n-4, 4), (n-4, 3, 1)\}$. Dann folgt die Aussage wie im Fall $p = 3$ aus den Dimensionsformeln in [38]. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \dim(D^{(n-4,4)}) &\geq \frac{n^4 - 14n^3 + 47n^2 - 34n}{24} = f(n) + 1 > f(n), \\ \dim(D^{(n-4,3,1)}) &\geq \frac{2n^4 - 28n^3 + 118n^2 - 140n - 48}{24} > f(n). \end{aligned}$$

(b) Es sei jetzt $D^\lambda \in R_n(5) \setminus R_n(4)$. Dann ist $\lambda \in \{(n-5, 5), (n-5, 4, 1), (n-5, 3, 2)\}$. Da die Behauptung für $n = 17, 18$ stimmt, können wir $n \geq 19$ annehmen und die Behauptung induktiv zeigen.

$$\boxed{\lambda := (n-5, 5)}$$

Ist n ungerade, so hat λ reduzierte 0-Signatur $+++$ und reduzierte 1-Signatur $--$, so dass nach Satz 4.1.3 $[\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) : D^{(n-1-4,4)}] = 2$ und daher $\dim(D^\lambda) \geq 2 \dim(D^{(n-1-4,4)}) > 2f(n-1) > f(n)$ nach (a) folgt.

Ist n gerade, so ist $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) \cong D^\mu$ mit $\mu := (n-1-5, 5)$. Aus den Überlegungen für den Fall, dass n gerade ist, folgt nun $[\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) : D^{(n-2-4,4)}] = 2$. Mit (a) erhalten wir $\dim(D^\lambda) \geq 2 \dim(D^{(n-2-4,4)}) > 2f(n-2) > f(n)$.

$$\boxed{\lambda := (n-5, 4, 1)}$$

Ist n ungerade, so hat λ reduzierte 0-Signatur $-$ und reduzierte 1-Signatur $+++-$, so dass $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) \cong D^{(n-1-4,4)} \oplus D^{(n-1-5,4,1)}$ nach Satz 4.1.2 gilt. Nach Induktionsvoraussetzung und (a) erhalten wir $\dim(D^\lambda) > 2f(n-1) > f(n)$.

Im Fall, dass n gerade ist, hat λ reduzierte 0-Signatur $---$ und reduzierte 1-Signatur $++++$. Nach Satz 4.1.3 ist daher $[\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) : D^{(n-1-4,4)}] = 3$, und es folgt wegen (a) auch hier $\dim(D^\lambda) > 3f(n-1) > f(n)$.

$$\boxed{\lambda := (n-5, 3, 2)}$$

Wenn n ungerade ist, dann hat λ reduzierte 0-Signatur $+++$ und reduzierte 1-Signatur $+---$, so dass $[\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) : D^{(n-1-4,3,1)}] = 3$ nach Satz 4.1.3 und somit $\dim(D^\lambda) > 3f(n-1) > f(n)$ nach (a) folgt.

Ist schließlich n gerade, dann hat λ reduzierte 0-Signatur $++-$ und reduzierte 1-Signatur $+--$. Es ist in diesem Fall also $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) \cong D^{(n-1-5,3,2)} \oplus D^{(n-1-4,3,1)}$, und nach Induktion und (a) ergibt sich $\dim(D^\lambda) > 2f(n-1) > f(n)$.

Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Lemma 7.2.6. *Es gilt:*

(i) *Im Fall $n \equiv 3 \pmod{4}$ ist $D^{(n-2,2)} \cong S^{(n-2,2)}$. Ferner gilt:*

$$\dim(D^{(n-2,2)}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 4) & , \text{ falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{2}(n^2 - 3n - 2) & , \text{ falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 2) & , \text{ falls } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{1}{2}(n^2 - 3n) & , \text{ falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

(ii) *Im Fall $n \equiv 1 \pmod{4}$ ist $D^{(n-3,3)} \cong S^{(n-3,3)}$. Ferner gilt:*

$$\dim(D^{(n-3,3)}) = \begin{cases} \frac{1}{6}(n^3 - 9n^2 + 14n) & , \text{ falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 5n) & , \text{ falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{6}(n^3 - 9n^2 + 20n - 12) & , \text{ falls } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{1}{6}(n^3 - 6n^2 - n + 6) & , \text{ falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

(iii) *Im Fall $n \equiv 0 \pmod{2}$ ist $D^{(n-3,2,1)} \cong S^{(n-3,2,1)}$. Ferner gilt:*

$$\dim(D^{(n-3,2,1)}) = \begin{cases} \frac{1}{3}(n^3 - 6n^2 + 8n) & , \text{ falls } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{6}(2n^3 - 15n^2 + 25n) & , \text{ falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{6}(2n^3 - 15n^2 + 25n - 6) & , \text{ falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen aus [70], S. 4.2.3, Kor. 4.2.4, S. 4.2.7 und Kor. 4.2.8. Wir zeigen (iii).

Es sei also $\lambda := (n-3, 2, 1)$. Im Fall $n \equiv 0 \pmod{2}$ ist D^λ Blockführer eines Blocks von $F\mathfrak{S}_n$ mit Gewicht $\frac{n-6}{2}$ und 2-Kern $(3, 2, 1)$, d.h. unter allen Partitionen, die zu irreduziblen Moduln dieses Blocks gehören, ist λ die lexikographisch größte. Demnach gilt $D^\lambda \cong Y^\lambda$ nach [70], S. 4.3.1, also auch $D^\lambda \cong S^\lambda$, und die Hakenformel liefert

$$\dim(D^\lambda) = \frac{n!}{(n-1)(n-3)(n-5)! \cdot 3} = \frac{n(n-2)(n-4)}{3} = \frac{n^3 - 6n^2 + 8n}{3}.$$

Im Fall $n \equiv 1 \pmod{2}$ hat λ reduzierte 0-Signatur $-$ und reduzierte 1-Signatur $+++-$. Es ist also $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda) \cong D^{(n-1-2,2)} \oplus D^{(n-1-3,2,1)}$. Aus obigen Überlegungen und (i) folgt dann

$$\begin{aligned} \dim(D^\lambda) &= \dim(D^{(n-1-2,2)}) + \dim(D^{(n-1-3,2,1)}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6}(2n^3 - 15n^2 + 25n) & , \text{ falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{6}(2n^3 - 15n^2 + 25n - 6) & , \text{ falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Bemerkung/Korollar 7.2.7. (i) Für $n \leq 14$ kennen wir die Vertizes aller irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln in Charakteristik 2 (siehe 9.1). Für $n = 15, 16$ sind die irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln der Dimension ≤ 1000 genau die zu den Partitionen $(15), (13, 2), (12, 2, 1), (11, 4), (8, 6, 1), (14, 1), (12, 3), (8, 7)$ beziehungsweise $(16), (15, 1), (14, 2), (9, 7), (13, 3), (13, 2, 1), (12, 4)$.

(ii) Aus Satz 7.2.3 und Lemma 7.2.5 folgt, dass für $n \geq 17$, $p = 2$ jeder irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul in $R_n(3) \cup \{D(n)\}$ liegt oder Dimension > 1155 hat. Die Moduln in $R_n(1)$ sind gerade $D^{(n)}$ und $D^{(n-1,1)}$. Deren Vertizes sind stets die Defektgruppen der entsprechenden Blöcke, außer im Fall $n = 4$. Die Vertizes von $D^{(3,1)}$ sind konjugiert zu Q_4 .

(iii) Es ist $\dim(D(n)) = 2^{\frac{n-1}{2}}$, wenn n ungerade und $\dim(D(n)) = 2^{\frac{n-2}{2}}$, wenn n gerade ist. Somit folgt $\dim(D(n)) > 1000$ für $n \geq 21$.

- (iv) Ferner ist $D^{(n-2,2)} \cong S^{(n-2,2)}$ im Fall $n \equiv 3 \pmod{4}$ und $D^{(n-3,3)} \cong S^{(n-3,3)}$ im Fall $n \equiv 1 \pmod{4}$. Die Vertizes dieser Moduln sind also nach Bemerkung 5.4.3 bekannt. Sie sind in \mathfrak{S}_n zu $P_{n-4} \times P_2^2$ beziehungsweise zu $P_{n-6} \times P_2^2$ konjugiert. Die Dimensionsformeln aus obigem Lemma zeigen ferner $\dim(D^{(n-2,2)}) > 1000$ für $n \geq 48$ und $\dim(D^{(n-3,3)}) > 1000$ für $n \geq 21$.
- (v) Der Modul $D^{(n-3,2,1)}$ ist nach obigem Lemma isomorph zum Spechtmodul $S^{(n-3,2,1)}$, falls n gerade ist, so dass die Vertizes dann nach Bemerkung 5.4.3 bekannt sind. Sie sind in \mathfrak{S}_n zu P_{n-5} konjugiert. Ist n ungerade, so gilt $D^{(n-1-2,2)} | \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^{(n-3,2,1)})$ und auch $D^{(n-3,2,1)} | \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^{(n-1-2,2)})$. Somit sind in diesem Fall die Vertizes von $D^{(n-1-2,2)}$ auch Vertizes von $D^{(n-3,2,1)}$.
- (vi) Falls n ungerade ist, gilt $D^{(n-3,3)} | \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(D^{(n-4,2)})$ und auch $D^{(n-4,2)} | \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(D^{(n-3,3)})$. Also sind die Vertizes von $D^{(n-4,2)}$ dann auch Vertizes von $D^{(n-3,3)}$.
- (vii) Die Moduln $D^{(n-2,2)}$ mit $n \leq 20$ beziehungsweise $D^{(n-3,3)}$ mit $n \leq 14$ wurden bereits in [70] untersucht. Diese haben, mit Ausnahme der bereits in (iii) erwähnten sowie der Moduln $D^{(3,2)}$, $D^{(4,3)}$ und $D^{(5,3)}$, stets die 2-Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n als Vertizes. Weiter haben $D^{(3,2)}$ und $D^{(4,3)}$ Vertex Q_4 , und $D^{(5,3)}$ hat Vertex Q_8 .
- (viii) Um nun also die Vertizes aller irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen in Charakteristik 2 der Dimension ≤ 1000 zu bestimmen, müssen wir noch folgende Moduln betrachten:

- $D^{(11,4)}$, $D^{(8,6,1)}$, $D^{(12,4)}$,
- $D^{(n-3,3)}$ für $n \in \{16, 18, 20\}$,
- $D^{(n-2,2)}$ für $n \in \{21, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 44, 45, 46\}$,
- $D^{(8,7)} = D(15)$, $D^{(9,7)} = D(16)$, $D^{(9,8)} = D(17)$, $D^{(10,8)} = D(18)$, $D^{(10,9)} = D(19)$,
 $D^{(11,9)} = D(20)$.

Die Vertizes von $D^{(8,6,1)}$ sind in \mathfrak{S}_{15} konjugiert zu denen von $D^{(8,6)}$, da $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{14}}^{\mathfrak{S}_{15}}(D^{(8,6,1)}) \cong D^{(8,6)} \oplus D^{(7,6,1)}$ gilt und $D^{(7,6,1)}$ relativ \mathfrak{S}_8 -projektiv ist, $D^{(8,6,1)}$ dagegen nicht. Weiter ist $D^{(11,4)} \cong S^{(11,4)}$ und hat somit Vertex $P_4^3 \times P_2$ nach Bemerkung 5.4.3. Der Modul $D^{(12,4)}$ liegt im Hauptblock von $F\mathfrak{S}_{16}$, und Computerberechnungen zeigen, dass er bezüglich keiner der maximalen Untergruppen von P_{16} , welche selbstzentralisierend in P_{16} sind, relativ projektiv ist. Folglich hat er die 2-Sylowgruppen von \mathfrak{S}_{16} als Vertizes.

Die Vertizes der Moduln $D^{(n-3,3)}$ für $n = 16, 18, 20$ sowie die der Moduln $D^{(n-2,2)}$ für $n = 21, \dots, 41, 45$ wurden direkt mit den Computerprogrammen aus [70] berechnet. Es handelt sich in all diesen Fällen um die Defektgruppen der entsprechenden Blöcke.

Wir betrachten nun die Moduln $D^{(40,2)}$, $D^{(42,2)}$, $D^{(44,2)}$, und für $n \geq 41$ bezeichnen wir mit V_n jeweils einen Vertex von $D^{(n-2,2)}$ mit $V_n \leq P_n$. Ferner gilt im Fall $n \equiv 0 \pmod{2}$ stets $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(D^{(n-2,2)}) \cong D^{(n-1-2,2)}$ und somit $V_{n-1} \leq_{\mathfrak{S}_n} V_n$. Damit erhalten wir nun:

- Im Fall $n = 42$ ist $P_{32} \times P_8 = V_{41} \leq_{\mathfrak{S}_{42}} V_{42} \leq P_{32} \times P_8 \times P_2$. Da $D^{(40,2)}$ nicht relativ \mathfrak{S}_{41} -projektiv ist, folgt $V_{42} = P_{32} \times P_8 \times P_2$.
- Im Fall $n = 44$ ist $P_{32} \times P_4 \times P_2^3 = V_{43} \leq_{\mathfrak{S}_{44}} V_{44} \leq P_{32} \times P_8 \times P_4 = P_{44}$. Weiter besitzt P_{44} einerseits genau eine in \mathfrak{S}_{44} zu P_{32} konjugierte Untergruppe nach Bemerkung/Korollar 3.1.6 und andererseits genau 31 Konjugationsklassen maximaler Untergruppen, welche P_{32} enthalten. Computerberechnungen zeigen, dass $D^{(42,2)}$ bezüglich keiner dieser maximalen Untergruppen relativ projektiv ist. Somit folgt $V_{44} = P_{32} \times P_8 \times P_4 = P_{44}$.
- Im Fall $n = 46$ ist $P_{32} \times P_8 \times P_4 = V_{45} \leq_{\mathfrak{S}_{46}} V_{46} \leq P_{32} \times P_8 \times P_4 \times P_2$. Da $D^{(44,2)}$ nicht relativ \mathfrak{S}_{45} -projektiv ist, folgt $V_{46} = P_{32} \times P_8 \times P_4 \times P_2$.

Somit handelt es sich bei den Vertizes auch in diesen Fällen jeweils um die 2-Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n , also um die Defektgruppen des Hauptblocks.

Schließlich bestimmen wir noch die Vertizes der Spinmoduln $D(15), \dots, D(20)$. Im Beweis von Lemma 7.2.1 hatten wir bereits gesehen, dass $D(n)$ im Fall $n \equiv 1 \pmod{4}$ reduzierte 1-Signatur $++$ und im Fall $n \equiv 3 \pmod{4}$ reduzierte 1-Signatur $--$ hat. Genauer gilt $e_1^{(2)}(D(n)) \cong D(n-2)$ im Fall $n \equiv 3 \pmod{4}$ sowie $f_1^{(2)}(D(n)) \cong D(n+2)$ im Fall $n \equiv 1 \pmod{4}$. Somit haben $D(4m+1)$ und $D(4m+3)$ für alle $m \in \mathbb{N}^*$ stets einen gemeinsamen Vertex. Es seien nun $n \in \{15, \dots, 20\}$ und $P \leq P_n$ ein Vertex von $D(n)$. Computerberechnungen zeigen dann, dass Folgendes gilt:

$$P = \begin{cases} Q_{16} & \text{für } n = 16, 17 \\ P_{18} & \text{für } n = 18, \\ Q_{20} & \text{für } n = 20. \end{cases}$$

Aus obigen Überlegungen und den Ergebnissen aus [70], Kap. 7 folgt dann schließlich $P = Q_8 \times Q_4$ im Fall $n = 15$ und $P = Q_{16}$ im Fall $n = 19$.

7.3 Irreduzible Moduln in Charakteristik $p > 3$

Abschließend betrachten wir den Fall $p > 3$. Dann gilt

Lemma 7.3.1 ([8], L. 1.20). *Es seien $n \geq 13$ und F ein Körper der Charakteristik p . Ferner sei D ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul. Dann liegt D in $R_n(2)$, oder es ist*

$$\dim(D) \geq \frac{n^3 - 9n^2 + 14n}{6}.$$

Bemerkung 7.3.2. Obiges Lemma zeigt also, dass für $n \geq p^2$ jeder irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul in $R_n(2)$ liegt oder Dimension > 1000 hat. Die Vertizes der Moduln aus $R_n(2)$ sind nach [70] Satz 4.2.6 und Satz 4.1.4 stets die Defektgruppen der entsprechenden Blöcke. Im Fall $n < p^2$ gilt dies für alle irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln. Somit sind die Vertizes der irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen in Charakteristik $p > 3$, deren Dimensionen ≤ 1000 sind, stets die Defektgruppen der zugehörigen Blöcke.

Teil III

Computerberechnungen

Kapitel 8

Methoden zur Vertexberechnung

Im Folgenden seien stets G eine Gruppe und F ein Körper mit $\text{char}(F) = p > 0$. In [70] entwickelte R. Zimmermann einen Algorithmus zur Vertexberechnung unzerlegbarer FG -Moduln. Dessen MAGMA-Implementierung bildet die Grundlage der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Computerberechnungen. Allerdings kann dieser Algorithmus für Moduln großer Dimensionen aus Speicherplatzgründen meist nicht mehr direkt angewendet werden. Zwei der Hauptprobleme stellen in diesem Zusammenhang das Einschränken von FG -Moduln auf Untergruppen von G und das Bestimmen der unzerlegbaren direkten Summanden solcher Einschränkungen dar. Wir werden daher einige Verfahren erläutern, welche es ermöglichen, dieses Problem zu umgehen. Dabei werden wir weiterhin alle theoretischen Aussagen für Linksmoduln formulieren, die jeweiligen Algorithmen später jedoch entsprechend für Rechtsmoduln implementieren.

8.1 Abspalten unzerlegbarer direkter Summanden mit zyklischen Vertices

Bemerkung 8.1.1. Es sei P eine p -Untergruppe von G . Ferner sei M ein relativ P -projektiver unzerlegbarer FG -Modul mit Vertex $Q \leq P$. Ist weiter $\text{Res}_P^G(M) = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ mit unzerlegbaren FP -Moduln M_1, \dots, M_r , und ist $Q_i \leq P$ ein Vertex von M_i für $i = 1, \dots, r$, so gilt nach Satz 2.2.10 dann $Q_i \leq_G Q$ für $i = 1, \dots, r$ und $Q_j \sim_G Q$ für ein $j \in \{1, \dots, r\}$. Kennt man also die Vertices der Summanden M_1, \dots, M_r , so kennt man auch die Vertices von M . Die projektiven Summanden M_i können bei der Berechnung von Q vernachlässigt werden.

Der nachfolgende Algorithmus dient dazu, genau diese unzerlegbaren projektiven Summanden von $\text{Res}_P^G(M)$ abzuspalten, ohne die gesamte Zerlegung $\text{Res}_P^G(M) = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ explizit zu berechnen. Dabei beachte man, dass für einen FP -Modul N stets Folgendes gilt: Ist $x \in N$, und ist $\dim(FPx) = |P| = \dim(FP)$, so ist die Abbildung $FP \rightarrow FPx$, $g \mapsto gx$ ein Isomorphismus von FP -Moduln. Folglich ist FPx ein projektiver Untermodul von N und nach Bemerkung 2.2.3 dann sogar ein direkter Summand von N .

Algorithmus: ProjSummands

- Eingabe: eine p -Gruppe P und ein FP -Modul N , welcher unzerlegbare projektive Summanden N_1, \dots, N_l für ein $l \in \mathbb{N}$ hat
- Ausgabe: ein zu $N/(N_1 \oplus \cdots \oplus N_k)$ isomorpher FP -Modul für ein $k \leq l$
- Falls $\dim(N) > 0$ ist, wähle ein Element $x \in N$ zufällig und berechne den davon erzeugten FP -Untermodul FPx von N .
 - Falls $\dim(FPx) = |P|$ ist, setze $N := N/(FPx)$ und starte der Algorithmus mit diesem neuen Modul N .
 - Andernfalls bleibt N unverändert, und der Algorithmus wird wiederholt.

Der Algorithmus stoppt, falls $\dim(N) = 0$ ist, oder, falls nach 10 Versuchen kein Element $x \in N$ mit $\dim(FPx) = |P|$ gefunden wurde, und gibt den bis dahin berechneten Faktormodul von N zurück.

Das obige Verfahren garantiert nicht, dass alle unzerlegbaren projektiven Summanden von N gefunden werden. Besitzt N jedoch einen projektiven Summanden, so existiert auch ein $x \in N$, welches diesen erzeugt, und man findet ein solches Element x durch Zufallssuche mit hoher Wahrscheinlichkeit.

Bemerkung 8.1.2. Es gelten wieder die Voraussetzungen aus der vorigen Bemerkung. Ist M zusätzlich irreduzibel, und sind die Defektgruppen des Blocks von M nicht zyklisch, so sind auch die Vertizes von M nach [70], S. 3.1.5 nicht zyklisch. Im Fall $G = \mathfrak{S}_n$ gilt dies für alle irreduziblen Moduln in Blöcken vom Defekt > 1 . Daher werden wir als nächstes einen Algorithmus entwickeln, welcher unzerlegbare direkte Summanden eines FP -Moduls absplattet, die zyklische Vertizes haben. Wir treffen zunächst wieder einige Vorüberlegungen.

Dazu betrachten wir einen Körper K , eine Gruppe H und eine kurze exakte Sequenz

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow L \xrightarrow{\iota} N \xrightarrow{\nu} N/L \longrightarrow 0$$

von KH -Moduln. Dabei seien L ein Untermodul von N , ι die Inklusionsabbildung und ν der kanonische Epimorphismus. Nach [11], Thm. 1.5.8 zerfällt die Sequenz \mathcal{E} genau dann, wenn $N \cong L \oplus (N/L)$ gilt.

Sind nun $K = F$, $H = P$, $C = \langle c \rangle$ eine zyklische Untergruppe von P sowie $L = \text{Ind}_C^P(X)$ für einen absolut unzerlegbaren FC -Modul X , so ist L nach Satz 2.2.11 ebenfalls absolut unzerlegbar und hat zyklische Vertizes. Außerdem ist L relativ C -projektiv. Nach Satz 2.2.1 zerfällt die Sequenz \mathcal{E} also genau dann, wenn die kurze exakte Sequenz

$$\mathcal{E}' : 0 \longrightarrow \text{Res}_C^P(L) \longrightarrow \text{Res}_C^P(N) \longrightarrow \text{Res}_C^P(N/L) \longrightarrow 0$$

von FC -Moduln zerfällt. Demzufolge ist L genau dann ein direkter Summand von N , wenn $\text{Res}_C^P(N) \cong \text{Res}_C^P(L) \oplus \text{Res}_C^P(N/L)$ gilt. Sind weiter Δ eine von $\text{Res}_C^P(N)$ und Γ eine von $\text{Res}_C^P(L) \oplus \text{Res}_C^P(N/L)$ induzierte Matrixdarstellung von FC , so ist L genau dann ein direkter Summand von N , wenn $\Delta(c)$ und $\Gamma(c)$ ähnlich sind.

Konkrete Berechnungen zeigen, dass die unzerlegbaren direkten Summanden von N mit zyklischem Vertex C in der Regel isomorph zum Permutationsmodul $\text{Ind}_C^P(F_C)$ sind. Wir betrachten daher jetzt den Spezialfall $X = F_C$. Dann gilt $\text{Hom}_{FP}(\text{Ind}_C^P(F_C), N) \cong N^C$ (als F -Vektorräume). Hierbei bezeichne N^C die Menge aller Fixpunkte von N unter der Operation von C . Ist nun $x \in N^C$ mit $\dim_F(FPx) = |P : C| = \dim_F(\text{Ind}_C^P(F_C))$, so ist FPx ein zu $\text{Ind}_C^P(F_C)$ isomorpher Untermodul von N .

Algorithmus: CyclicVertexSummands

- Eingabe: eine p -Gruppe P und ein FP -Modul N , welcher für ein $l \in \mathbb{N}$ unzerlegbare direkte Summanden N_1, \dots, N_l mit zyklischen Vertizes besitzt
- Ausgabe: ein zu $N/(N_1 \oplus \dots \oplus N_k)$ isomorpher FP -Modul für ein $k \leq l$
- $N := \text{ProjSummands}(P, N)$;
- Berechne Repräsentanten C_1, \dots, C_m für die Konjugationsklassen zyklischer Untergruppen von P mit $|C_i| > 1$ für $i = 1, \dots, m$.
- Setze $i := 1$.

- Setze $C := C_i$.
- * Falls $\dim(N) \geq |P : C|$ ist:
 - Berechne N^C .
 - Setze $j := 0$.
 - Wähle ein Element $x \in N^C$ zufällig, und berechne FPx .
 - Ist $\dim(FPx) = |P : C|$, teste, ob $\text{Res}_C^P(FPx) \oplus \text{Res}_C^P(N/(FPx)) \cong \text{Res}_C^P(N)$ ist.
 - Falls ja, setze $N := N/(FPx)$, und wiederhole * mit diesem neuen Modul.
 - Andernfalls erhöhe i um 1.
 - Ist $j < 10$, setze $j := j + 1$, und gehe zu ◦.
 - Andernfalls, erhöhe i um 1.
- * Andernfalls erhöhe i um 1.

Nachdem für alle $i = 1, \dots, m$ getestet wurde, ob N einen zu $\text{Ind}_{C_i}^P(F_C)$ isomorphen direkten Summanden besitzt, wird der berechnete Faktormodul von N zurückgegeben.

Für jede Gruppe C_i werden jeweils höchstens 10 Versuche unternommen, einen zu $\text{Ind}_{C_i}^P(F_C)$ isomorphen direkten Summanden von N zu finden. Wieder ist somit nicht garantiert, dass der Algorithmus tatsächlich alle unzerlegbaren direkten Summanden von N mit zyklischen Vertizes findet. Besitzt jedoch N für eine zyklische Gruppe C_i einen zu $\text{Ind}_{C_i}^P(F_{C_i})$ isomorphen Summanden, so existiert auch ein $x \in N^{C_i}$, welches diesen erzeugt. Durch Zufallssuche findet man solch ein x mit hoher Wahrscheinlichkeit.

Der Algorithmus „CyclicVertexSummands“ spaltet zu Beginn mittels „ProjSummands“ unzerlegbare projektive Summanden und anschließend unzerlegbare Summanden mit nichttrivialen zyklischen Vertizes ab.

8.2 Kondensation

Als nächstes betrachten wir das Verfahren der **Kondensation** und fassen die dafür wichtigen Aussagen aus [54] und [55] zusammen, formulieren diese jedoch für Linksmoduln. In diesem Zusammenhang werden wir einige kategorientheoretische Aussagen benutzen. Für die Details verweisen wir auf [2].

Bemerkung 8.2.1. Zunächst seien K ein Körper, A eine K -Algebra und e ein Idempotent in A . Dabei lassen wir auch $\text{char}(K) = 0$ zu. Ferner bezeichnen wir mit $A\text{-mod}$ die Kategorie der A -Linksmoduln. Dann erhält man einen additiven, exakten Funktor

$$C_e : A\text{-mod} \longrightarrow eAe\text{-mod}$$

mit $C_e(M) := eM$ und $C_e(f) := f|_{eM}$ für alle A -Moduln M und N sowie alle $f \in \text{Hom}_A(M, N)$. Dieser Funktor heißt **Kondensationsfunktor** bezüglich e , und den eAe -Modul eM bezeichnet man als **kondensierte Modul**.

Der additive Funktor

$$Ae \otimes_{eAe} ? =: U_e : eAe\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$$

mit $U_e(\tilde{f}) = \text{id}_{Ae} \otimes \tilde{f}$ für alle eAe -Moduln \tilde{M} , \tilde{N} und alle $\tilde{f} \in \text{Hom}_{eAe}(\tilde{M}, \tilde{N})$ heißt **Unkondensationsfunktor** bezüglich e . Ist \tilde{M} ein eAe -Modul, so bezeichnet man den A -Modul $U_e(\tilde{M})$ als **unkondensierte Modul**. Der Funktor U_e ist jedoch im Gegensatz zu C_e im Allgemeinen nicht exakt.

Ist \mathcal{I} ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen irreduzibler A -Moduln, so bildet $\{eD \mid D \in \mathcal{I} \text{ und } eD \neq 0\}$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen irreduzibler eAe -Moduln. Ist M ein A -Modul mit der Eigenschaft, dass keiner seiner Kompositionsfaktoren von e annulliert wird, so sind $\text{End}_A(M)$ und $\text{End}_{eAe}(eM)$ als K -Algebren isomorph. Insbesondere ist in diesem Fall der A -Modul M genau dann (absolut) unzerlegbar beziehungsweise (absolut) irreduzibel, wenn der eAe -Modul eM (absolut) unzerlegbar beziehungsweise (absolut) irreduzibel ist.

Falls $eD \neq 0$ für alle $D \in \mathcal{I}$ gilt, so ist der Funktor U_e exakt. Ferner erhält man in dem Fall natürliche Äquivalenzen $C_e \circ U_e \sim \text{Id}_{eAe\text{-mod}}$ und $U_e \circ C_e \sim \text{Id}_{A\text{-mod}}$. Folglich sind die F -Algebren A und eAe Morita-äquivalent. Insbesondere ist dann $\text{End}_A(M) \cong \text{End}_{eAe}(eM)$ für jeden A -Modul M , und es gilt $U_e(C_e(M)) \cong M$ sowie $C_e(U_e(\widetilde{M})) \cong \widetilde{M}$ für jeden A -Modul M und jeden eAe -Modul \widetilde{M} .

Wir betrachten nun den Fall $K = F$ und $A = FG$. Für eine Untergruppe H von G mit $p \nmid |H|$ ist

$$e := e_H := \frac{1}{|H|} \cdot \sum_{h \in H} h \in FH$$

das Hauptblockidempotent in FH und damit insbesondere ein Idempotent in FG . Für den entsprechenden Kondensationsfunktor C_e und jeden FG -Modul M ist dann

$$C_e(M) = eM = M^H,$$

wobei M^H die Menge aller Fixpunkte von M unter der Operation von H sei. Man spricht daher auch von **Fixpunktkondensation** bezüglich H .

Ferner gilt $\dim_F(eM) = [\text{Res}_H^G(M) : F_H]$. In der Regel beträgt diese Dimension etwa $1/|H| \cdot \dim_F(M)$.

Bemerkung 8.2.2. Wir werden das Verfahren der Fixpunktkondensation dazu benutzen, einen FG -Modul M bezüglich einer möglichst großen p' -Untergruppe H von G zu kondensieren. Der kondensierte Modul eM hat, wie oben erwähnt, dann eine deutlich geringere Dimension als M . Dies hat unter anderem zur Folge, dass unzerlegbare direkte Summanden des eFG -Moduls eM effizient bestimmt werden können, im Gegensatz zu denen des FG -Moduls M selbst. Die Kenntnis der unzerlegbaren direkten Summanden von eM lässt dann nach obigen Überlegungen wiederum Rückschlüsse auf die unzerlegbaren direkten Summanden von M zu.

Für den kondensierten Modul $\widetilde{M} := eM$ haben wir stets eine Einbettung $\iota : \widetilde{M} \longrightarrow M$. Ist ferner \widetilde{N} ein eFG -Untermodul von \widetilde{M} , so existiert auch eine Einbettung $\tilde{\iota} : \widetilde{N} \longrightarrow \widetilde{M}$. Der unkondensierte Modul $U_e(\widetilde{N})$ ist dann der kleinste FG -Untermodul von M , welcher $\text{im}(\iota \circ \tilde{\iota})$ enthält. Bei unseren konkreten Berechnungen werden die Einbettungen ι und $\tilde{\iota}$ explizit gegeben sein. Dies wird uns dann wiederum ermöglichen, den unkondensierten Modul $U_e(\widetilde{N})$ tatsächlich als Untermodul von M zu konstruieren.

In praktischen Anwendungen ergibt sich allerdings das Problem, dass man die Algebra eFG selbst eventuell nicht explizit konstruieren kann. Wir werden daher statt dessen für ein Erzeugendensystem \mathcal{G} von G die von den Elementen ege mit $g \in \mathcal{G}$ erzeugte F -Algebra B konstruieren. Ferner arbeiten wir dann mit $\text{Res}_B^{eFG}(eM)$ an Stelle von eM . Dabei kann B durchaus eine echte Unter algebra von eFG sein. Aus der Unzerlegbarkeit von $\text{Res}_B^{eFG}(eM)$ zum Beispiel folgt jedoch weiterhin die von eM . Ferner können wir auch nach wie vor zu einem Untermodul \widetilde{N} von $\text{Res}_B^{eFG}(eM)$ den entsprechenden unkondensierten Modul als Untermodul von M konkret konstruieren. Somit liefert auch die Analyse des B -Moduls $\text{Res}_B^{eFG}(eM)$ Informationen über die Struktur des Ausgangsmoduls M .

8.3 Benson-Test

Schließlich betrachten wir ein Verfahren, welches ermöglicht, für einen unzerlegbaren FG -Modul M Aussagen darüber zu treffen, ob eine bestimmte elementarabelsche Untergruppe E von G in einem Vertex von M enthalten sein muss. Auf diese Weise kann dann für gewisse Untergruppen von G grundsätzlich ausgeschlossen werden, dass sie überhaupt als Vertices von M in Frage kommen. Wir nehmen dabei ab jetzt an, dass der Körper $F \supset \mathbb{F}_p$ algebraisch abgeschlossen ist. Dann erhalten wir:

Lemma 8.3.1. *Es seien $n \in \mathbb{N}^*$, V ein n -dimensionaler \mathbb{F}_p -Vektorraum mit Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ linear unabhängig über \mathbb{F}_p . Ist ferner $U \subset V$ ein echter \mathbb{F}_p -Untervektorraum von V , so gilt:*

$$x := \alpha_1 \otimes b_1 + \dots + \alpha_n \otimes b_n \notin F \otimes_{\mathbb{F}_p} U.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $U \subset V$ ein echter \mathbb{F}_p -Untervektorraum von V ist, welcher das oben definierte Element x enthält. Ferner seien $\dim_{\mathbb{F}_p}(U) = m$ und $\{u_1, \dots, u_m\}$ eine \mathbb{F}_p -Basis von U . Dann existieren Elemente $\beta_1, \dots, \beta_m \in F$ mit $x = \beta_1 \otimes u_1 + \dots + \beta_m \otimes u_m$. Außerdem lässt sich u_i für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ in der Form $u_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} b_j$ mit gewissen $\gamma_{ij} \in \mathbb{F}_p$ schreiben. Somit ist

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \otimes b_j = \sum_{i=1}^m \beta_i \otimes u_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i \otimes \gamma_{ij} b_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \gamma_{ij} \beta_i \otimes b_j.$$

Für $j = 1, \dots, n$ ist folglich $\alpha_j = \sum_{i=1}^m \gamma_{ij} \beta_i \in \sum_{i=1}^m \mathbb{F}_p \beta_i$. Wegen $m < n$ müssen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ daher linear abhängig über \mathbb{F}_p sein, im Widerspruch zur Voraussetzung, und die Behauptung folgt. \square

Satz 8.3.2 ([4]). *Es seien G eine Gruppe und M ein unzerlegbarer FG -Modul mit Vertex P . Ferner seien $E := \langle g_1, \dots, g_n \rangle \leq G$ eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^n für ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit $E \not\leq_G P$ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ linear unabhängig über \mathbb{F}_p . Dann gilt:*

(i) $\text{Res}_{F\langle u \rangle}^{FG}(M)$ ist frei. Dabei sei $\langle u \rangle$ die von $u := u_\alpha := 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i(g_i - 1) \in 1 + \mathbf{J}(FE) \subseteq \mathcal{U}(FE)$ erzeugte zyklische verschobene Untergruppe von FE .

(ii) $\dim_F((u - 1)^{p-1} \cdot M) = \dim_F(M)/p$.

Beweis. Der FP -Modul L sei eine Quelle von M . Dann ist also $M | \text{Ind}_P^G(L)$ und somit

$$\text{Res}_E^G(M) | \text{Res}_E^G(\text{Ind}_P^G(L)) \cong \bigoplus_{EgP \in E \backslash G/P} \text{Ind}_{E \cap gPg^{-1}}^E(\text{Res}_{E \cap gPg^{-1}}^{gPg^{-1}}({}^g L))$$

nach Satz 2.1.3. Wegen $E \not\leq_G P$ existieren also ein $r \in \mathbb{N}^*$, maximale Untergruppen E_i von E und FE_i -Moduln N_i für $i = 1, \dots, r$ mit

$$\text{Res}_E^G(M) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ind}_{E_i}^E(N_i). \quad (*)$$

Die Abbildung

$$f : F \otimes_{\mathbb{F}_p} E \longrightarrow \mathbf{J}(FE)/\mathbf{J}(FE)^2, \quad \beta \otimes g \mapsto \beta(g - 1) + \mathbf{J}(FE)^2$$

ist ein Isomorphismus von F -Vektorräumen. Nach Lemma 8.3.1 ist außerdem $\alpha_1 \otimes g_1 + \dots + \alpha_n \otimes g_n \notin F \otimes_{\mathbb{F}_p} U$ für jede echte Untergruppe U von E . Sind also $i \in \{1, \dots, r\}$ und $E_i = \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ eine der maximalen Untergruppen von E aus (*), so gilt:

$$(u - 1) + \mathbf{J}(FE)^2 = \alpha_1(g_1 - 1) + \dots + \alpha_n(g_n - 1) + \mathbf{J}(FE)^2 \notin \sum_{j=1}^{n-1} F[(x_j - 1) + \mathbf{J}(FE)^2].$$

Demzufolge ist $\{(x_1 - 1) + \mathbf{J}(FE)^2, \dots, (x_{n-1} - 1) + \mathbf{J}(FE)^2, (u - 1) + \mathbf{J}(FE)^2\}$ eine F -Basis von $\mathbf{J}(FE)/\mathbf{J}(FE)^2$. Daraus folgt, dass $FE = F\tilde{E}$ für die elementarabelsche Untergruppe $\tilde{E} := \langle x_1, \dots, x_{n-1}, u \rangle$ von $1 + \mathbf{J}(FE)$ gilt. Insbesondere ist also $|\tilde{E}| = p^n$ und $\tilde{E} = E_i \langle u \rangle$. Damit erhalten wir nun

$$\text{Ind}_{E_i}^E(N_i) = FE \otimes_{FE_i} N_i = F\tilde{E} \otimes_{FE_i} N_i = \text{Ind}_{E_i}^{\tilde{E}}(N_i)$$

und

$$\text{Res}_{F\langle u \rangle}^{FE}(\text{Ind}_{E_i}^E(N_i)) = \text{Res}_{F\langle u \rangle}^{F\tilde{E}}(\text{Ind}_{E_i}^{\tilde{E}}(N_i)) \cong \text{Ind}_{\langle u \rangle \cap E_i}^{\langle u \rangle}(\text{Res}_{\langle u \rangle \cap E_i}^{E_i}(N_i)) = \text{Ind}_1^{\langle u \rangle}(\text{Res}_1^{E_i}(N_i)).$$

Dies ist ein freier $F\langle u \rangle$ -Modul, und wegen

$$\text{Res}_{F\langle u \rangle}^{FG}(M) = \text{Res}_{F\langle u \rangle}^{FE}(\text{Res}_{FE}^{FG}(M)) \cong \bigoplus_{j=1}^r \text{Res}_{F\langle u \rangle}^{FE}(\text{Ind}_{E_j}^E(N_j))$$

ist auch $\text{Res}_{F\langle u \rangle}^{FG}(M)$ frei. Daher ist also $\text{Res}_{F\langle u \rangle}^{FG}(M) \cong t \cdot F\langle u \rangle = \underbrace{F\langle u \rangle \oplus \dots \oplus F\langle u \rangle}_{t \text{ Summanden}}$ mit $t := \dim_F(M)/p$.

Schließlich betrachten wir die F -lineare Abbildung

$$F\langle u \rangle \longrightarrow F\langle u \rangle, \quad x \mapsto (u - 1)^{p-1}x = \langle u \rangle^+ x.$$

Diese hat Bild $(u - 1)^{p-1}F\langle u \rangle = \mathbf{J}(F\langle u \rangle)^{p-1}$, also Rang 1 nach [11], L. 4.6.1, und sie induziert eine F -lineare Abbildung $t \cdot F\langle u \rangle \longrightarrow t \cdot F\langle u \rangle$ vom Rang t . Damit folgt auch Behauptung (ii), und der Satz ist bewiesen. \square

Bemerkung 8.3.3. Der Satz zeigt also, dass P für den Fall, dass $\text{Res}_{F\langle u \rangle}^{FG}(M)$ nicht frei ist, eine zu E konjugierte Untergruppe von G enthalten muss. Mit den Bezeichnungen aus 2.6 bedeutet das wiederum, dass E in einem Vertex von M enthalten sein muss, falls ein $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_E^r(\text{Res}_E^G(M))$ existiert, so dass $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ linear unabhängig über \mathbb{F}_p sind.

Kapitel 9

Vertexberechnungen

In den nachfolgenden Tabellen fassen wir unsere Ergebnisse über die irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln in Charakteristik 2 und 3 zusammen, welche mit dem Computer untersucht wurden. Dabei sind die irreduziblen Moduln durch die zugehörigen p -regulären Partitionen parametrisiert und jeweils nach Blöcken sortiert. Jeder Block wiederum ist durch seinen p -Kern parametrisiert.

Stehen zwei Partitionen nebeneinander, so sind diese Mullineux-konjugiert. Die Tabellen enthalten für jeden irreduziblen Modul ferner dessen Dimension, eine Defektgruppe seines Blocks, einen Vertex sowie die Dimension einer Quelle, sofern diese berechnet werden konnte. Ist ein aufgelisteter irreduzibler Modul außerdem zu gewissen Spechtmoduln isomorph, so beinhaltet die Spalte „Specht“ die zugehörigen Partitionen dieser Spechtmoduln. Die Berechnungen wurden zunächst stets über den Primkörpern \mathbb{F}_2 beziehungsweise \mathbb{F}_3 durchgeführt. Stehen für $p = 2$ in einer Zeile zwei Dimensionswerte der Quellen eines Moduls, so ist der erste die Dimension der Quellen über \mathbb{F}_2 . Der zweite ist die Dimension der Quellen über \mathbb{F}_4 oder \mathbb{F}_8 , welche dann stets absolut unzerlegbar sind.

Falls wir nicht explizit etwas anderes voraussetzen, wird es sich bei dem Körper F in diesem Kapitel stets um den Primkörper \mathbb{F}_p für $p = 2, 3$ und bei allen Moduln um **Rechtsmoduln** handeln.

9.1 Vertizes irreduzibler Moduln in Charakteristik 2

In [70] wurden bereits die Vertizes aller irreduziblen Moduln in Charakteristik 2 bis $n = 12$ sowie die Dimensionen der Quellen bis $n = 11$ berechnet.

$n = 1, \dots, 5$

n	Block	Def.	Partition	Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
1	(1)	1	(1)	1	1	1	(1)	
2	\emptyset	P_2	(2)	1	P_2	1	(2)	(1 ²)
3	(1)	P_2	(3)	1	P_2	1	(3)	(1 ³)
	(2, 1)	1	(2, 1)	2	1	1	(2, 1)	
4	\emptyset	P_4	(4)	1	P_4	1	(4)	(1 ⁴)
			(3, 1)	2	Q_4	1	(2 ²)	
5	(1)	P_4	(5)	1	P_4	1	(5)	(1 ⁵)
			(3, 2)	4	Q_4	4/2	-	-
	(2, 1)	P_2	(4, 1)	4	P_2	1	(4, 1)	(2, 1 ³)

$n = 6, \dots, 11$

n	Block	Def.	Partition	Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
6	\emptyset	P_6	(6)	1	P_6	1	(6)	(1 ⁶)
			(5, 1)	4	P_6	4	-	-
			(4, 2)	4	P_6	4	-	-
	(3, 2, 1)	1	(3, 2, 1)	16	1	1	(3, 2, 1)	
7	(1)	P_6	(7)	1	P_6	1	(7)	(1 ⁷)
			(5, 2)	14	P_2^3	1	(5, 2)	(2 ² , 1 ³)
			(4, 2, 1)	20	P_6	4	-	-
	(2, 1)	P_4	(6, 1)	6	P_4	1	(6, 1)	(2, 1 ⁵)
			(4, 3)	8	Q_4	4/2	-	-
8	\emptyset	P_8	(8)	1	P_8	1	(8)	(1 ⁸)
			(7, 1)	6	P_8	6	-	-
			(6, 2)	14	P_8	14	-	-
			(5, 3)	8	Q_8	4	-	-
			(4, 3, 1)	40	Q_8	20	-	-
	(3, 2, 1)	P_2	(5, 2, 1)	64	P_2	1	(5, 2, 1)	(3, 2, 1 ³)
9	(1)	P_8	(9)	1	P_8	1	(9)	(1 ⁹)
			(7, 2)	26	P_8	26	-	-
			(6, 2, 1)	78	P_8	14	-	-
			(5, 4)	16	Q_8	8	-	-
			(5, 3, 1)	40	Q_8	20	-	-
	(2, 1)	P_6	(8, 1)	8	P_6	1	(8, 1)	(2, 1 ⁷)
			(6, 3)	48	P_2^3	1	(6, 3)	(2 ³ , 1 ³)
			(4, 3, 2)	160	$Q_4 \times P_2$	4/2	-	-
10	\emptyset	P_{10}	(10)	1	P_{10}	1	(10)	(1 ¹⁰)
			(9, 1)	8	P_{10}	8	-	-
			(8, 2)	26	P_{10}	26	-	-
			(7, 3)	48	P_{10}	48	-	-
			(6, 4)	16	P_{10}	16	-	-
			(6, 3, 1)	198	P_{10}	70	-	-
			(5, 3, 2)	200	P_{10}	200	-	-
	(3, 2, 1)	P_4	(7, 2, 1)	160	P_4	1	(7, 2, 1)	(3, 2, 1 ⁵)
			(5, 4, 1)	128	Q_4	4/2	-	-
	(4, 3, 2, 1)	1	(4, 3, 2, 1)	768	1	1	(4, 3, 2, 1)	
11	(1)	P_{10}	(11)	1	P_{10}	1	(11)	(1 ¹¹)
			(9, 2)	44	$P_4 \times P_2^3$	1	(9, 2)	(2 ² , 1 ⁷)
			(8, 2, 1)	186	P_{10}	26	-	-
			(7, 4)	164	P_{10}	20	-	-
			(7, 3, 1)	198	P_{10}	70	-	-
			(6, 4, 1)	144	P_{10}	16	-	-
			(5, 4, 2)	416	P_{10}	96	-	-
	(2, 1)	P_8	(10, 1)	10	P_8	1	(10, 1)	(2, 1 ⁸)
			(8, 3)	100	P_8	26	-	-
			(6, 5)	32	Q_8	8	-	-
			(6, 3, 2)	848	$P_4 \times Q_4$	8	-	-
			(5, 3, 2, 1)	1168	Q_8	20	-	-

n = 12

Block	Def.	Partition	Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
\emptyset	P_{12}	(12)	1	P_{12}	1	(12)	(1^{12})
		(11, 1)	10	P_{12}	10	-	-
		(10, 2)	44	P_{12}	44	-	-
		(9, 3)	100	P_{12}	100	-	-
		(8, 4)	164	P_{12}	164	-	-
		(8, 3, 1)	570	P_{12}	314	-	-
		(7, 5)	32	Q_{12}	32/16	-	-
		(7, 3, 2)	1046	P_{12}	534	-	-
		(6, 5, 1)	288	Q_{12}	288/144	-	-
		(6, 4, 2)	416	P_{12}	416	-	-
		(5, 4, 2, 1)	2368	Q_{12}		-	-
(3, 2, 1)	P_6	(9, 2, 1)	320	P_6	1	(9, 2, 1)	$(3, 2, 1^7)$
		(7, 4, 1)	1408	P_2^3	1	(7, 4, 1)	$(3, 2^2, 1^3)$
		(5, 4, 3)	1792	$Q_4 \times P_2$	4/2	-	-
(4, 3, 2, 1)	P_2	(6, 3, 2, 1)	5632	P_2	1	(6, 3, 2, 1)	$(4, 3, 2, 1^3)$

Die Vertizes der irreduziblen $F\mathfrak{S}_{12}$ -Moduln wurden, wie bereits erwähnt, in [70] bestimmt. Mit Ausnahme des Moduls $D^{(5,4,2,1)}$ konnten mit dem Computer auch die Quellen der Moduln im Hauptblock berechnet werden. Ferner ist der Block mit 2-Kern (3, 2, 1) Scopes-äquivalent zum Block von $F\mathfrak{S}_9$ mit 2-Kern (2, 1). So kommen die entsprechenden Quellendimensionen zustande. Der Modul $D^{(6,3,2,1)}$ ist ein Spechtmodul und hat somit triviale Quelle.

n = 13

Block	Def.	Partition	Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
(1)	P_{12}	(13)	1	P_{12}	1	(13)	(1^{13})
		(11, 2)	64	P_{12}	32	-	-
		(10, 2, 1)	364	P_{12}	44	-	-
		(9, 4)	364	P_{12}	172	-	-
		(9, 3, 1)	570	P_{12}	314	-	-
		(8, 4, 1)	1572	P_{12}	164	-	-
		(7, 6)	64	$Q_8 \times Q_4$	32/16	-	-
		(7, 5, 1)	288	Q_{12}	288/144	-	-
		(7, 4, 2)	2510	P_{12}	846	-	-
		(6, 4, 3)	2208	P_{12}	416	-	-
		(5, 4, 3, 1)	8448	Q_{12}		-	-
(2, 1)	P_{10}	(12, 1)	12	P_{10}	1	(12, 1)	$(2, 1^{11})$
		(10, 3)	208	$P_4 \times P_2^3$	1	(10, 3)	$(2^3, 1^7)$
		(8, 5)	560	P_{10}	20	-	-
		(8, 3, 2)	2848	$P_6 \times Q_4$	4/2	-	-
		(6, 5, 2)	1728	$Q_8 \times P_2$	8	-	-
		(7, 3, 2, 1)	8008	P_{10}	70	-	-
		(6, 4, 2, 1)	3200	P_{10}	96	-	-

Wir betrachten zuerst den Block mit 2-Kern (2, 1). Mit den Bezeichnungen aus 4.1 und $i = 1$ erhalten wir dann zunächst:

$$(8, 5) \longleftrightarrow (7, 4), \quad (7, 3, 2, 1) \longleftrightarrow (7, 3, 1), \quad (6, 4, 2, 1) \longleftrightarrow (5, 4, 2).$$

So kommen die Aussagen über Vertizes und Quellen der entsprechenden Moduln zustande. Weiter sind $D^{(12,1)}$ und $D^{(10,3)}$ irreduzible Spechtmoduln zu 2-regulären Partitionen, haben also

triviale Quellen. Die Aussagen über ihre Vertizes folgen aus Bemerkung 5.4.3. Die Vertizes und Quellen der beiden übrigen irreduziblen Moduln dieses Blocks wurden mit dem Computer berechnet.

Für den Hauptblock gilt mit $i = 0$:

$$\begin{aligned} (10, 2, 1) &\longleftrightarrow (10, 2), & (9, 3, 1) &\longleftrightarrow (8, 3, 1), & (8, 4, 1) &\longleftrightarrow (8, 4), \\ (7, 5, 1) &\longleftrightarrow (6, 5, 1), & (6, 4, 3) &\longleftrightarrow (6, 4, 2). \end{aligned}$$

Daraus folgen die Aussagen über Vertizes und Quellen der zugehörigen Moduln. Die Vertizes und Quellen der restlichen irreduziblen Moduln dieses Blocks wurden mit dem Computer bestimmt. Dabei wurde insbesondere der Modul $D^{(5,4,3,1)}$ der Dimension 8448 auf P_{12} eingeschränkt. Der Algorithmus aus Bemerkung 8.1.1 findet alle sieben unzerlegbaren projektiven Summanden dieser Einschränkung. Der Faktormodul nach diesen hat Dimension 1280 und besitzt einen unzerlegbaren direkten Summanden der Dimension 1024 mit Vertex Q_{12} .

n = 14

Block	Def.	Partition	Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
\emptyset	P_{14}	(14)	1	P_{14}	1	(14)	(1 ¹⁴)
		(13, 1)	12	P_{14}	12	-	-
		(12, 2)	64	P_{14}	64	-	-
		(11, 3)	208	P_{14}	208	-	-
		(10, 4)	364	P_{14}	364	-	-
		(10, 3, 1)	1300	P_{14}	404	-	-
		(9, 5)	560	P_{14}	560	-	-
		(9, 3, 2)	3418	P_{14}		-	-
		(8, 6)	64	P_{14}	64	-	-
		(8, 5, 1)	4576	P_{14}		-	-
		(8, 4, 2)	2510	P_{14}	1486	-	-
		(7, 5, 2)	2016	P_{14}	992	-	-
		(7, 4, 2, 1)	19240	P_{14}		-	-
		(6, 5, 3)	4704	P_{14}	1120	-	-
		(6, 4, 3, 1)	11648	Q_{14}		-	-
(3, 2, 1)	P_8	(11, 2, 1)	560	P_8	1	(11, 2, 1)	(3, 2, 1 ⁹)
		(9, 4, 1)	3808	P_8	26	-	-
		(7, 6, 1)	768	Q_8	8	-	-
		(7, 4, 3)	10880	$P_4 \times Q_4$	8	-	-
		(5, 4, 3, 2)	35840	E_8	12/4	-	-
(4, 3, 2, 1)	P_4	(8, 3, 2, 1)	23296	P_4	1	(8, 3, 2, 1)	(4, 3, 2, 1 ⁵)
		(6, 5, 2, 1)	13312	Q_4	4/2	-	-

Der Block mit 2-Kern (4, 3, 2, 1) ist Scopes-äquivalent zum Block von $F\mathfrak{S}_{10}$ mit 2-Kern (3, 2, 1).

Für den Block mit 2-Kern (3, 2, 1) und $i = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} (11, 2, 1) &\longleftrightarrow (10, 1), & (9, 4, 1) &\longleftrightarrow (8, 3), & (7, 6, 1) &\longleftrightarrow (6, 5), \\ (7, 4, 3) &\longleftrightarrow (6, 3, 2). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Vertizes und Quellen der entsprechenden Moduln. Wir untersuchen den Modul $D^{(5,4,3,2)} =: D$ der Dimension 35840. Nach [27], Cor. 3.21 ist $D \cong D^{(8,6)} \otimes D^{(9,5)}$. Wir schränken beide Faktoren auf $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_8$ ein und erhalten $\text{Res}_{\mathfrak{S}_8}^{\mathfrak{S}_{14}}(D^{(8,6)}) \cong 4M_1$ und $\text{Res}_{\mathfrak{S}_8}^{\mathfrak{S}_{14}}(D^{(9,5)}) \cong 6M_2 \oplus 4M_3$. Dabei sind M_1, M_2, M_3 unzerlegbar mit $\dim(M_1) = 16$, $\dim(M_2) = 48$, $\dim(M_3) = 68$. Weiter ist $\text{Res}_{P_8}^{\mathfrak{S}_8}(M_1 \otimes M_2)$ projektiv, und $\text{Res}_{P_8}^{\mathfrak{S}_8}(M_1 \otimes M_3)$ besitzt sieben unzerlegbare projektive Summanden. Der Faktormodul nach diesen sei M . Er hat Dimension 192, ist unzerlegbar

über \mathbb{F}_2 und hat Vertex E_8 , wobei E_8 eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 8 ist, welche regulär auf den Zahlen $1, \dots, 8$ operiert. Somit hat auch D Vertex E_8 . Wir bestimmen noch die Dimension einer Quelle von D . Die Einschränkung $\text{Res}_{E_8}^{P_8}(M)$ besitzt 12 unzerlegbare projektive Summanden sowie acht paarweise nichtisomorphe 12-dimensionale unzerlegbare Summanden, welche alle E_8 als Vertex haben. Außerdem ist jeder dieser Summanden zwar unzerlegbar über \mathbb{F}_2 , zerfällt jedoch über \mathbb{F}_8 in eine direkte Summe dreier absolut unzerlegbarer 4-dimensionaler Moduln. Somit erhalten wir die Dimension der Quellen von D .

Schließlich betrachten wir den Hauptblock. Die Aussagen über $D^{(14)}$ sind klar, und für $D^{(13,1)}$ folgen sie aus [70], Satz 4.1.5, L. 4.1.13. Mit $i = 1$ gilt ferner:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i((12, 2)) &= 1, & e_i(D^{(12,2)}) &\cong D^{(11,2)}, \\ \varepsilon_i((10, 4)) &= 1, & e_i(D^{(10,4)}) &\cong D^{(9,4)}, \\ \varepsilon_i((9, 3, 2)) &= 1, & e_i(D^{(9,3,2)}) &\cong D^{(9,3,1)}, \\ \varepsilon_i((8, 4, 2)) &= 1, & e_i(D^{(8,4,2)}) &\cong D^{(7,4,2)}.\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \{(12, 2), (10, 4), (9, 3, 2), (8, 4, 2)\}$ besitzt also $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{13}}^{\mathfrak{S}_{14}}(D^\lambda)$ stets einen irreduziblen direkten Summanden mit Vertex P_{12} . Da $|P_{14} : P_{12}| = 2$ und D^λ nicht relativ \mathfrak{S}_{13} -projektiv ist, muss also D^λ in diesen Fällen die 2-Sylowgruppen von \mathfrak{S}_{14} als Vertizes haben.

Der Modul $D^{(6,4,3,1)}$ ist relativ \mathfrak{A}_{14} -projektiv, da $(6, 4, 3, 1)$ eine S -Partition ist. Außerdem ist $\varepsilon_1((6, 4, 3, 1)) = 1$ und $e_1(D^{(6,4,3,1)}) \cong D^{(5,4,3,1)}$. Somit ist Q_{12} in einem Vertex von $D^{(6,4,3,1)}$ enthalten. Da $D^{(6,4,3,1)}$ nicht relativ \mathfrak{S}_{13} -projektiv ist und $|Q_{14} : Q_{12}| = 2$ gilt, müssen die Vertizes von $D^{(6,4,3,1)}$ also in \mathfrak{S}_{14} zu Q_{14} konjugiert sein.

Die Vertizes der restlichen Moduln sowie in einigen Fällen auch die Quellen wurden mit dem Computer berechnet. Dabei konnten die Vertizes des Moduls $D := D^{(7,4,2,1)}$ der Dimension 19240 nicht mit den üblichen Methoden wie Einschränken auf geeignete Untergruppen und Abspalten projektiver Summanden berechnet werden. Hier wenden wir das Kondensationsverfahren an.

Dazu seien $P \leq P_{14} = P_8 \times P_4 \times P_2$ ein Vertex von D sowie $D_1 := D^{(8,4,2)}$ und $D_2 := D^{(13,1)}$. Zunächst betrachten wir diese Moduln wieder über dem Körper \mathbb{F}_2 . Computerberechnungen zeigen dann, dass $D_1 \otimes D_2 \cong D \oplus D^{(7,4,3)}$ gilt. Wir wissen bereits, dass der Modul $D^{(7,4,3)}$ in einem Block vom 2-Gewicht 4 liegt und Vertex $P_4 \times Q_4$ hat. Wir berechnen nun die Einschränkungen von D_1 und D_2 auf die Young-Untergruppe $\mathfrak{S}_{(8,6)}$ und erhalten:

Es ist $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{(8,6)}}^{\mathfrak{S}_{14}}(D_2)$ absolut unzerlegbar, und es gilt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{(8,6)}}^{\mathfrak{S}_{14}}(D_1) = M_1 \oplus M_2$ mit absolut unzerlegbaren $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{(8,6)}$ -Moduln M_1 und M_2 der Dimensionen 1486 beziehungsweise 1024. Außerdem ist M_2 relativ $\mathfrak{S}_{(8,4)}$ -projektiv, D_1 dagegen hat Vertex P_{14} . Nach Satz 2.2.10 ist somit P_{14} ein Vertex von M_1 , und P ist Vertex eines unzerlegbaren direkten Summanden von $M_1 \otimes \text{Res}_{\mathfrak{S}_{(8,6)}}^{\mathfrak{S}_{14}}(D_2)$. Die Computerberechnungen zeigen außerdem, dass unzerlegbare $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{(8,4)}$ -Moduln N_1 und N_2 mit $N_1 | \text{Res}_{\mathfrak{S}_{(8,4)}}^{\mathfrak{S}_{(8,6)}}(M_1)$ und $N_2 | \text{Res}_{\mathfrak{S}_{(8,4)}}^{\mathfrak{S}_{14}}(D_2)$ derart existieren, dass $N_1 \otimes N_2$ einen unzerlegbaren direkten Summanden mit Vertex $P_8 \times P_2$ besitzt. Also hat dann $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{(8,4)}}^{\mathfrak{S}_{14}}(D_1 \otimes D_2)$ und damit auch $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{(8,4)}}^{\mathfrak{S}_{14}}(D)$ einen unzerlegbaren direkten Summanden mit Vertex $P_8 \times P_2$. Somit erhalten wir $P_8 \times P_2 \leq_{\mathfrak{S}_{14}} P \leq P_8 \times P_4 \times P_2$.

Da außerdem $C_{P_{14}}(P) = Z(P)$ gelten muss, ist P eine der folgenden vier Untergruppen von P_{14} :

$$P_8 \times P_4 \times P_2, \quad P_8 \times (P_2)^3, \quad P_8 \times \langle (9, 11, 10, 12) \rangle, \quad P_8 \times Q_4 \times P_2.$$

Wir betrachten nun die elementarabelsche Gruppe $E := \langle g_1, \dots, g_7 \rangle = (P_2)^7$ von P_{14} mit $g_i := (2i-1, 2i)$ für $i = 1, \dots, 7$. Außerdem wählen wir eine Normalbasis $\lambda_1, \dots, \lambda_7$ von \mathbb{F}_{128} über \mathbb{F}_2 und setzen $u := 1 + \sum_{i=1}^7 \lambda_i(g_i - 1)$. Dann sind sowohl $\text{Res}_{\mathbb{F}_{128}\langle u \rangle}^{\mathbb{F}_{128}\mathfrak{S}_{14}}(D_2^{\mathbb{F}_{128}})$ als auch

$\text{Res}_{\mathbb{F}_{128}\langle u \rangle}^{\mathbb{F}_{128}\mathfrak{S}_{(8,6)}}(M_1^{\mathbb{F}_{128}})$ nicht frei. Fassen wir jetzt D_1 und D_2 als Moduln über $F := \overline{\mathbb{F}_{128}}$ auf und verwenden wieder die Bezeichnungen aus Definition 2.6.2, so erhalten wir zusammen mit Satz 2.6.4 Folgendes: Es existieren ein unzerlegbarer direkter Summand X von $\text{Res}_{FE}^{F\mathfrak{S}_{14}}(D_1)$ sowie ein unzerlegbarer direkter Summand Y von $\text{Res}_{FE}^{F\mathfrak{S}_{14}}(D_2)$, so dass $(\lambda_1, \dots, \lambda_7) \in V_E^r(X) \cap V_E^r(Y) = V_E^r(X \otimes Y)$ gilt. Nach Satz 2.6.4 existiert also ein unzerlegbarer direkter Summand Z von $X \otimes Y$, dessen Einschränkung auf $F\langle u \rangle$ nicht frei ist. Mit Satz 8.3.2 folgt daraus wiederum, dass $(P_2)^7$ in einem Vertex von Z enthalten sein muss. Demzufolge enthält dann auch der Vertex P von D eine in \mathfrak{S}_{14} zu $(P_2)^7$ konjugierte Untergruppe. Deshalb ist entweder $P = P_8 \times P_4 \times P_2$ oder $P = P_8 \times (P_2)^3$. Wir wollen die zweite Möglichkeit ausschließen.

Dazu betrachten wir den $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{(8,6)}$ -Modul $M := \text{Res}_{\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{(8,6)}}^{\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{14}}(D)$ und untersuchen dessen unzerlegbare direkte Summanden, welche im Hauptblock von $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{(8,6)}$ liegen. Unter diesen existiert nämlich einer, dessen Vertizes auch Vertizes von D sind.

Mit Hilfe der Formeln aus [53] berechnen wir dazu das Hauptblockidempotent von $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{(8,6)}$ (beziehungsweise dessen Operation auf M) sowie den $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{(8,6)}$ -Modul Me . Dies ist der Eigenraum der \mathbb{F}_2 -linearen Abbildung $M \rightarrow M$, $m \mapsto me$ zum Eigenwert 1 und hat Dimension 9000. Außerdem ist Me die direkte Summe aller unzerlegbaren direkten Summanden von M , welche im Hauptblock von $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{(8,6)}$ liegen.

Als nächstes untersuchen wir die Vertizes der unzerlegbaren direkten Summanden von Me . Zu diesem Zweck berechnen wir $L := \text{Res}_{\mathbb{F}_2C}^{\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{(8,6)}}(Me)$ für

$$C := \langle (1, \dots, 8), (1, 2), (9, 10), (9, 11, 13)(10, 12, 14) \rangle \cong \mathfrak{S}_8 \times (P_2 \wr C_3)$$

und kondensieren L bezüglich der Untergruppe $H := \langle (1, 5, 4)(2, 6, 7) \rangle$ von C . Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 8.2 gilt dann $Se_H \neq 0$ für alle Kompositionsfaktoren S von L . Folglich sind die \mathbb{F}_2 -Algebren $\text{End}_{\mathbb{F}_2C}(L)$ und $\text{End}_{e_H\mathbb{F}_2Ce_H}(Le_H)$ isomorph. Wie bereits in Bemerkung 8.2.1 erwähnt, lässt sich die Algebra $e_H\mathbb{F}_2Ce_H$ eventuell nicht explizit konstruieren. Statt dessen konstruieren wir die \mathbb{F}_2 -Unteralgebra A von $e_H\mathbb{F}_2Ce_H$, welche von den Elementen e_Hge_H mit $g \in \{(1, \dots, 8), (1, 2), (9, 10), (9, 11, 13)(10, 12, 14), (1, \dots, 7)\}$ erzeugt wird, sowie den A -Modul $\text{Res}_A^{e_H\mathbb{F}_2Ce_H}(Le_H) =: \tilde{L}$. Dieser hat Dimension 2992 und besitzt genau zwei absolut unzerlegbare direkte Summanden der Dimensionen 1536 und 1456. Da A möglicherweise eine echte Unteralgebra von $e_H\mathbb{F}_2Ce_H$ ist, könnte Le_H und damit auch L durchaus unzerlegbar sein.

Wir unkondensieren nun beide Summanden von \tilde{L} und erhalten Untermoduln L_1 und L_2 von L mit $\dim(L_1) = 4392$, $\dim(L_2) = 4608$. Ferner ist $L_1 + L_2 = L$ und $L_1 \cap L_2 = 0$. Daher gilt $L = L_1 \oplus L_2$. Damit folgt nun auch, dass L_1 und L_2 absolut unzerlegbar sind.

Abschließend nehmen wir $P = P_8 \times (P_2)^3$ an und setzen

$$G := \langle (1, \dots, 8), (1, 2), (9, 10), (9, 11, 13)(10, 12, 14), (9, 11)(10, 12) \rangle \cong \mathfrak{S}_8 \times (P_2 \wr \mathfrak{S}_3).$$

Dann ist also $P \leq C \leq G$ mit $|G : C| = 2$ und $N_{\mathfrak{S}_{(8,6)}}(P) \leq G$. Ferner besitzt Me einen unzerlegbaren direkten Summanden mit Vertex P , und dieser ist insbesondere relativ G -projektiv. Falls nun $\text{Res}_G^{\mathfrak{S}_{(8,6)}}(Me)$ absolut unzerlegbar ist, so hat $\text{Res}_G^{\mathfrak{S}_{(8,6)}}(Me)$ nach Satz 2.2.10 ebenfalls Vertex P , ist also insbesondere relativ C -projektiv, woraus

$$\text{Res}_G^{\mathfrak{S}_{(8,6)}}(Me) | \text{Ind}_C^G(\text{Res}_C^{\mathfrak{S}_{(8,6)}}(Me)) \cong \text{Ind}_C^G(L_1) \oplus \text{Ind}_C^G(L_2)$$

folgt. Nach Satz 2.2.11 und obigen Berechnungen sind aber $\text{Ind}_C^G(L_1)$ und $\text{Ind}_C^G(L_2)$ absolut unzerlegbar der Dimensionen 8784 beziehungsweise 9216. Widerspruch.

Demzufolge ist $\text{Res}_G^{\mathfrak{S}_{(8,6)}}(Me)$ nicht absolut unzerlegbar, und es sei $K|\mathbb{F}_2$ eine endliche Körpererweiterung mit der Eigenschaft, dass alle unzerlegbaren direkten Summanden des KG -Moduls $\text{Res}_G^{\mathfrak{S}_{(8,6)}}(Me)^K$ absolut unzerlegbar sind. Die obigen Berechnungen zeigen, dass dann $\text{Res}_G^{\mathfrak{S}_{(8,6)}}(Me)^K$ die direkte Summe zweier absolut unzerlegbarer Moduln U_1 und U_2 der Dimensionen 4392 beziehungsweise 4608 sein muss. Ferner besitzt einer von beiden Vertex P , ist also

auch relativ C -projektiv. Die Berechnungen und Satz 2.2.11 zeigen jedoch, dass $\text{Ind}_C^G(\text{Res}_C^G(U_1))$ und $\text{Ind}_C^G(\text{Res}_C^G(U_2))$ absolut unzerlegbar sind und Dimensionen 8784 beziehungsweise 9216 haben, so dass $U_i \nmid \text{Ind}_C^G(\text{Res}_C^G(U_i))$ für $i = 1, 2$ folgt. Widerspruch.

Wir haben nun schließlich gezeigt, dass P kein Vertex eines unzerlegbaren direkten Summanden von M und somit auch kein Vertex von D ist. Also gilt $P = P_8 \times P_4 \times P_2$.

$n \geq 15$

Für $n \geq 15$ wurden noch die Vertizes derjenigen irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln bestimmt, welche Dimensionen ≤ 1000 haben. Wir fassen die entsprechenden Ergebnisse in der nachfolgenden Tabelle zusammen. Dabei führen wir für $n \geq 17$ die Moduln $D^{(n)}$ und $D^{(n-1,1)}$ nicht mehr auf.

n	Block	Def.	Partition	Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
15	(1)	P_{14}	(15)	1	P_{14}	1	(15)	(1^{15})
			(13, 2)	90	$P_8 \times P_2^3$	1	(13, 2)	$(2^2, 1^9)$
			(12, 2, 1)	624	P_{14}	64	-	-
			(11, 4)	910	$P_4^3 \times P_2$	1	(11, 4)	$(2^4, 1^{11})$
			(8, 6, 1)	832	P_{14}	64	-	-
	(2, 1)	P_{12}	(14, 1)	14	P_{12}	1	(14, 1)	$(2, 1^{13})$
			(12, 3)	336	P_{12}	44	-	-
			(8, 7)	128	$Q_8 \times Q_4$	32/16	-	-
16	\emptyset	P_{16}	(16)	1	P_{16}	1	(16)	(1^{16})
			(15, 1)	14	P_{16}	14	-	-
			(14, 2)	90	P_{16}	90	-	-
			(13, 3)	336	P_{16}	336	-	-
			(12, 4)	910	P_{16}	910	-	-
			(9, 7)	128	Q_{16}	64	-	-
	(3, 2, 1)	P_{10}	(13, 2, 1)	896	P_{10}	1	(13, 2, 1)	$(3, 2, 1^{11})$
17	(1)	P_{16}	(15, 2)	118	P_{16}	118	-	-
			(9, 8)	256	Q_{16}	128	-	-
	(2, 1)	P_{14}	(14, 3)	544	$P_8 \times P_2^3$	1	(14, 3)	$(2^3, 1^{11})$
18	\emptyset	P_{18}	(16, 2)	118	P_{18}	118	-	-
			(10, 8)	256	P_{18}	256	-	-
			(15, 3)	544	P_{18}	544	-	-
19	(1)	P_{18}	(17, 2)	152	$P_{12} \times P_2^3$	1	(17, 2)	$(2^2, 1^{15})$
	(2, 1)	P_{16}	(16, 3)	780	P_{16}	118	-	-
			(10, 9)	512	Q_{16}	128	-	-
20	\emptyset	P_{20}	(18, 2)	152	P_{20}	152	-	-
			(11, 9)	512	Q_{20}	512/256	-	-
			(17, 3)	780	P_{20}	780	-	-

In den Fällen $21 \leq n \leq 48$ wurden jeweils noch die Vertizes des irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ Moduls $D^{(n-2,2)}$ bestimmt. Wie bereits in Bemerkung/Korollar 7.2.7 erwähnt, handelt es sich dabei stets um die 2-Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n , es sei denn, es ist $n \equiv 3 \pmod{4}$. Dann ist nämlich $D^{(n-2)} \cong S^{(n-2,2)}$ und hat daher Vertex $P_{n-4} \times P_2^2$.

Für $n = 21, \dots, 27$ wurden schließlich auch die Vertizes des $F\mathfrak{S}_n$ -Spinmoduls $D(n)$ berechnet. Bezeichnen wir jeweils mit P einen Vertex von $D(n)$ mit $P \leq P_n$, und ist $n = \sum_{i=0}^{s_n} \alpha_i(n) 2^i$ die

2-adische Entwicklung von n , so gilt in diesen Fällen:

$$P = \begin{cases} Q_n & , \text{ falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \prod_{i=0}^{s_n} (Q_{2^i})^{\alpha_i(n)} & , \text{ falls } n \equiv 1, 3 \pmod{4} \\ P_n & , \text{ falls } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

9.2 Vertizes irreduzibler Moduln in Charakteristik 3

In [70] wurden für $p = 3$ bis auf eine Ausnahme bereits die Vertizes aller irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln für $n \leq 11$ berechnet, jedoch keine Quellen.

$n = 1, \dots, 8$

n	Blöcke	Def.	Partitionen	Dim.	Vertex	Quelle	Specht
1	(1)	1	(1)	1	1	1	(1)
2	(2) (1 ²)	1	(2) (1 ²)	1	1	1	(2) (1 ²)
3	\emptyset	P_3	(3) (2, 1)	1	P_3	1	(3) (1 ³)
4	(1)	P_3	(4) (2 ²)	1	P_3	1	(4) (1 ⁴)
	(3, 1) (2, 1 ²)	1	(3, 1) (2, 1 ²)	3	1	1	(3, 1) (2, 1 ²)
5	(2) (1 ²)	P_3	(5) (3, 2)	1	P_3	1	(5) (1 ⁵)
			(2 ² , 1) (4, 1)	4	P_3	1	(2, 1 ³) (4, 1)
	(3, 1 ²)	1	(3, 1 ²)	6	1	1	(3, 1 ²)
6	\emptyset	P_3^2	(6) (3 ²)	1	P_3^2	1	(6) (1 ⁶)
			(5, 1) (3, 2, 1)	4	P_3^2	4	-
			(4, 1 ²)	6	P_3^2	6	-
	(4, 2) (2 ² , 1 ²)	1	(4, 2) (2 ² , 1 ²)	9	1	1	(4, 2) (2 ² , 1 ²)
7	(1)	P_3^2	(7) (4, 3)	1	P_3^2	1	(7) (1 ⁷)
			(5, 2) (3, 2, 1 ²)	13	P_3^2	4	-
			(4, 2, 1)	20	P_3^2	1	(4, 1 ³)
	(3, 1) (2, 1 ²)	P_3	(6, 1) (3 ² , 1)	6	P_3	1	(6, 1) (2, 1 ⁵)
			(3, 2 ²) (5, 1 ²)	15	P_3	1	(3, 1 ⁴) (5, 1 ²)
8	(2) (1 ²)	P_3^2	(8) (4 ²)	1	P_3^2	1	(8) (1 ⁸)
			(5, 3) (3, 2 ² , 1)	28	P_3^2	1	(5, 3)* (2 ³ , 1 ²)
			(5, 2, 1) (4, 2 ²)	35	P_3^2	1	(5, 1 ³) (4, 1 ⁴)
			(4, 3, 1) (7, 1)	7	P_3^2	1	(2, 1 ⁶) (7, 1)
			(3 ² , 1 ²) (6, 2)	13	P_3^2	4	- -
	(3, 1 ²)	P_3	(6, 1 ²) (3 ² , 2)	21	P_3	1	(6, 1 ²) (3, 1 ⁵)
	(4, 2, 1 ²)	1	(4, 2, 1 ²)	90	1	1	(4, 2, 1 ²)

Für $n \leq 5$ sind alle irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln auch Spechtmoduln, haben also triviale Quellen.

Die Einschränkungen von $D^{(5,1)}$ und $D^{(4,1^2)}$ auf P_3^2 sind absolut unzerlegbar. Des Weiteren gilt $D^{(5,1)}| \text{Res}_{\mathfrak{S}_6}^{\mathfrak{S}_7}(D^{(5,2)})$ und $D^{(5,2)}| \text{Ind}_{\mathfrak{S}_6}^{\mathfrak{S}_7}(D^{(5,1)})$ sowie $\text{Res}_{\mathfrak{S}_7}^{\mathfrak{S}_8}(D^{(6,2)}) \cong D^{(5,2)}$. So erhalten wir die Quellen der irreduziblen Moduln zu den Partitionen (5, 1), (4, 1²), (5, 2), (6, 2) und deren Mullineux-konjugierten. Die restlichen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln sind für $6 \leq n \leq 8$ Spechtmoduln, haben also triviale Quellen.

n = 9

Blöcke	Def.	Partitionen		Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
\emptyset	P_9	(9)	(5, 4)	1	P_9	1	(9)	(1 ⁹)
		(8, 1)	(4 ² , 1)	7	P_9	7	-	-
		(7, 1 ²)	(4, 3, 2)	21	P_9	21	-	-
		(6, 3)	(3 ² , 2, 1)	41	P_9	41	-	-
		(6, 2, 1)	(5, 2 ²)	35	P_9	35	-	-
(4, 2)	P_3	(7, 2)	(4, 3, 1 ²)	27	P_3	1	(7, 2)	(2 ² , 1 ⁵)
(2 ² , 1 ²)		(4, 2 ² , 1)	(5, 2, 1 ²)	189	P_3	1	(4, 2, 1 ³)	(5, 2, 1 ²)
(5, 3, 1)	1	(5, 3, 1)	(3, 2 ² , 1 ²)	162	1	1	(5, 3, 1)	(3, 2 ² , 1 ²)

n = 10

Blöcke	Def.	Partitionen		Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
(1)	P_9	(10)	(5 ²)	1	P_9	1	(10)	(1 ¹⁰)
		(8, 2)	(4 ² , 1 ²)	34	P_9	7	-	-
		(7, 3)	(4, 3, 2, 1)	41	P_9	41	-	-
		(7, 2, 1)	(4, 3 ²)	84	P_3^3	1	(7, 1 ³)	(4, 1 ⁶)
		(6, 2, 1 ²)	(5, 2 ² , 1)	224	P_9	35	-	-
(3, 1)	P_3^2	(9, 1)	(5, 4, 1)	9	P_3^2	1	(9, 1)	(2, 1 ⁸)
		(6, 4)	(3 ² , 2 ²)	90	P_3^2	1	(6, 4)	(2 ⁴ , 1 ²)
		(6, 2 ²)	(5, 3, 2)	126	P_3^2	1	(6, 1 ⁴)	(5, 1 ⁵)
		(4 ² , 2)	(8, 1 ²)	36	P_3^2	1	(3, 1 ⁷)	(8, 1 ²)
		(3 ² , 2, 1 ²)	(6, 3, 1)	279	P_3^2	4	-	-
(5, 3, 1 ²)	1	(5, 3, 1 ²)	(4, 2 ² , 1 ²)	567	1	1	(5, 3, 1 ²)	(4, 2 ² , 1 ²)

Die Einschränkungen der irreduziblen Moduln des Hauptblocks von $F\mathfrak{S}_9$ auf P_9 sind alle absolut unzerlegbar. Die irreduziblen Moduln der anderen Blöcke von $F\mathfrak{S}_9$ sind Spechtmoduln und haben daher triviale Quellen.

Für $n = 10$ ist der Block mit 3-Kern $(3, 1)$ Scopes-äquivalent zum Hauptblock von $F\mathfrak{S}_8$, und der Block mit 3-Kern $(2, 1^2)$ ist Scopes-äquivalent zum alternierenden Block von $F\mathfrak{S}_8$. Betrachten wir den Hauptblock, so gilt mit $i = 0$:

$$(8, 2) \longleftrightarrow (8, 1), \quad (7, 3) \longleftrightarrow (6, 3), \quad (6, 2, 1^2) \longleftrightarrow (6, 2, 1).$$

Damit erhält man die Quellen der irreduziblen Moduln zu diesen Partitionen und deren Mullineux-konjugierten.

Die restlichen irreduziblen $F\mathfrak{S}_{10}$ -Moduln sind Spechtmoduln.

n = 11

Blöcke		Def.	Partitionen		Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
(2)	(1 ²)	P_9	(11)	(6, 5)	1	P_9	1	(11)	(1 ¹¹)
			(8, 3)	(4 ² , 2, 1)	109	P_9	28	-	-
			(8, 2, 1)	(4 ² , 3)	120	P_3^3	1	(8, 1 ³)	(4, 1 ⁷)
			(7, 3, 1)	(4, 3, 2, 1 ²)	320	P_9	41	-	-
			(6, 3, 1 ²)	(5, 2 ² , 1 ²)	791	P_9	35	-	-
			(5 ² , 1)	(10, 1)	10	P_9	1	(2, 1 ⁹)	(10, 1)
			(5, 4, 1 ²)	(9, 2)	34	P_9	7	-	-
			(5, 3 ²)	(7, 2 ²)	210	P_3^3	1	(5, 1 ⁶)	(7, 1 ⁴)
			(5, 3, 2, 1)	(6, 2 ² , 1)	714	P_3^3	4	-	-
			(4, 3, 2 ²)	(7, 4)	131	P_9	41	-	-
(3, 1 ²)		P_3^2	(9, 1 ²) (5, 4, 2)		45	P_3^2	1	(9, 1 ²)	(3, 1 ⁸)
			(6, 4, 1) (3 ² , 2 ² , 1)		693	P_3^2	1	(6, 4, 1)	(3, 2 ³ , 1 ²)
			(6, 3, 2)		252	P_3^2	1	(6, 1 ⁵)	
(4, 2, 1 ²)		P_3	(7, 2, 1 ²) (4, 3 ² , 1)		594	P_3	1	(7, 2, 1 ²)	(4, 2, 1 ⁵)

Die einzigen irreduziblen $F\mathfrak{S}_{11}$ -Moduln, deren Vertizes in [70] nicht bestimmt wurden, sind $D^{(5,3,2,1)}$ und der dazu Mullineux-konjugierte Modul $D^{(6,2^2,1)}$ der Dimension 714. Computerberechnungen zeigen, dass diese Moduln Vertex P_3^3 und 4-dimensionale Quellen haben. Außerdem wurden die Quellen der Moduln $D^{(8,3)}$ und $D^{(7,3,1)}$ mit dem Computer berechnet. Für $i = 1$ gilt ferner:

$$(6, 3, 1^2) \longleftrightarrow (6, 2, 1^2), \quad (5, 4, 1^2) \longleftrightarrow (4^2, 1^2), \quad (4, 3, 2^2) \longleftrightarrow (4, 3, 2, 1).$$

So kommen die Dimensionen der Quellen der zugehörigen irreduziblen Moduln zustande. Die restlichen Moduln des Hauptblocks sind Spechtmoduln.

Die irreduziblen Moduln des Blocks mit 3-Kern (1²) sind die Mullineux-konjugierten zu den irreduziblen Moduln des Hauptblocks.

Die irreduziblen Moduln der beiden anderen Blöcke sind Spechtmoduln.

$n = 12$

Blöcke	Def.	Partitionen	Dim.	Vertex	Quelle	Specht
\emptyset	P_{12}	(12)	1	P_{12}	1	(12)
		$(6, 6)$				(1^{12})
		$(11, 1)$	10	P_{12}	10	-
		$(6, 5, 1)$				-
		$(10, 1^2)$	45	P_{12}	45	-
		$(5^2, 2)$				-
		$(9, 3)$	143	P_{12}	62	-
		$(5, 4, 2, 1)$				-
		$(9, 2, 1)$	120	P_{12}	120	-
		$(5, 4, 3)$				-
		$(8, 4)$	131	P_{12}	131	-
		$(4^2, 2^2)$				-
		$(8, 2^2)$	210	P_{12}	210	-
		$(6, 3^2)$				-
		$(7, 4, 1)$	1013	P_{12}	284	-
		$(4, 3, 2^2, 1)$				-
$(4, 2)$	P_3^2	$(7, 3, 2)$	252	P_{12}	126	-
		$(6, 4, 1^2)$	1936	P_{12}	235	-
		$(5, 3, 2, 1^2)$				-
		$(6, 3, 2, 1)$	1428	P_{12}	147	-
		$(10, 2)$	54	P_3^2	1	$(10, 2)$
		$(5^2, 1^2)$				$(2^2, 1^8)$
		$(7, 5)$	297	P_3^2	1	$(7, 5)$
		$(4, 3^2, 2)$				$(2^5, 1^2)$
		$(7, 2^2, 1)$	1728	P_3^2	1	$(7, 2, 1^3)$
		$(5, 3^2, 1)$				$(5, 2, 1^5)$
		$(4^2, 3, 1)$	945	P_3^2	1	$(4, 2, 1^6)$
		$(8, 2, 1^2)$				$(8, 2, 1^2)$
		$(4, 3^2, 1^2)$	1431	P_3^2	4	-
		$(7, 3, 1^2)$				-
$(5, 3, 1)$	P_3	$(8, 3, 1)$	891	P_3	1	$(8, 3, 1)$
		$(4^2, 2, 1^2)$				$(3, 2^2, 1^5)$
$(6, 4, 2)$	1	$(5, 3, 2^2)$	3564	P_3	1	$(5, 3, 1^4)$
		$(6, 2^2, 1^2)$				$(6, 2^2, 1^2)$
$(6, 4, 2)$	1	$(6, 4, 2)$	2673	1	1	$(6, 4, 2)$
		$(3^2, 2^2, 1^2)$				$(3^2, 2^2, 1^2)$

Der einzige Block von $F\mathfrak{S}_{12}$, welcher keine abelschen Defektgruppen hat, ist der Hauptblock. Ferner ist der Block mit 3-Kern $(4, 2)$ Scopes-äquivalent zum Block von $F\mathfrak{S}_{10}$ mit 3-Kern $(3, 1)$, und der konjugierte Block mit 3-Kern $(2^2, 1^2)$ ist Scopes-äquivalent zum Block von $F\mathfrak{S}_{10}$ mit 3-Kern $(2, 1^2)$. Die irreduziblen Moduln der anderen Blöcke mit abelschen Defektgruppen sind alle Spechtmoduln. So erhalten wir auch die Dimensionen der Quellen dieser Moduln.

Die irreduziblen Moduln im Hauptblock, welche durch 3 teilbare Dimensionen besitzen, sind $D^{(10, 1^2)}$, $D^{(9, 2, 1)}$, $D^{(8, 2^2)}$, $D^{(7, 3, 2)}$, $D^{(6, 3, 2, 1)}$ und die entsprechenden Mullineux-konjugierten Moduln. Die Vertizes dieser Moduln sowie die Dimensionen der Quellen aller Moduln des Hauptblocks wurden mit dem Computer berechnet.

$n = 13$

Blöcke	Def.	Partitionen		Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
(1)	P_{12}	(13)	(7,6)	1	P_{12}	1	(13)	(1 ¹³)
		(11,2)	(6, 5, 1 ²)	64	P_{12}	10	-	-
		(10,3)	(5 ² , 2, 1)	143	P_{12}	62	-	-
		(8,5)	(4 ² , 3, 2)	428	P_{12}	131	-	-
		(10,2,1)	(5 ² , 3)	220	P_{12}	1	(10, 1 ³)	(4, 1 ⁹)
		(7,5,1)	(4, 3 ² , 2, 1)	2287	P_{12}	154	-	-
		(7, 4, 1 ²)	(5, 3 ² , 1 ²)	3367	P_{12}	235	-	-
		(9, 2, 1 ²)	(5,4,3,1)	1065	P_{12}	120	-	-
		(6, 3 ² , 1)	(8, 2 ² , 1)	1938	P_{12}	210	-	-
		(7, 3 ²)		924	P_3^4	1	(7, 1 ⁶)	
		(7,3,2,1)		1428	P_{12}	147	-	
(3, 1)	P_9	(12,1)	(6 ² , 1)	12	P_9	1	(12, 1)	(2, 1 ¹¹)
		(9,4)	(5, 4, 2 ²)	417	P_9	28	-	-
		(9, 2 ²)	(5, 4 ²)	495	P_3^3	1	(9, 1 ⁴)	(5, 1 ⁸)
		(7,4,2)	(4, 3, 2 ² , 1 ²)	5082	P_9	41	-	-
		(6,5,2)	(11, 1 ²)	66	P_9	1	(3, 1 ¹⁰)	(11, 1 ²)
		(6,4,3)	(8, 3, 2)	792	P_3^3	1	(6, 1 ⁷)	(8, 1 ⁵)
		(6,4,2,1)	(5, 3, 2 ² , 1)	10296	P_3^3	1	(6, 4, 1 ³)	(5, 2 ³ , 1 ²)
		(6, 3, 2, 1 ²)	(6, 3, 2, 2)	8568	P_3^3	4	-	-
		(4 ² , 2 ² , 1)	(8, 4, 1)	1275	P_9	41	-	-
(5, 3, 1 ²)	P_3	(5, 4, 2, 1 ²)	(9,3,1)	1299	P_9	7	-	-
		(5, 3 ² , 2)	(7, 2 ² , 1 ²)	7371	P_3	1	(5, 3, 1 ⁵)	(7, 2 ² , 1 ²)
(4, 2 ² , 1 ²)		(8, 3, 1 ²)	(4 ² , 3, 1 ²)	4212	P_3	1	(8, 3, 1 ²)	(4, 2 ² , 1 ⁵)

Der Block mit 3-Kern $(5, 3, 1^2)$ und sein konjugierter Block haben abelsche Defektgruppen, und alle irreduziblen Moduln dieser Blöcke sind Spechtmoduln, haben also Vertex P_3 und triviale Quellen.

Wir betrachten den Block mit 3-Kern $(3, 1)$. Mit $i = 2$ gilt dann:

$$\begin{array}{lll}
 (9, 4) \longleftrightarrow (8, 3), & (7, 4, 2) \longleftrightarrow (7, 3, 1), & (6, 3, 2, 1^2) \longleftrightarrow (5, 3, 2, 1), \\
 (4^2, 2^2, 1) \longleftrightarrow (4, 3, 2^2) & (5, 4, 2, 1^2) \longleftrightarrow (5, 4, 1^2). &
 \end{array}$$

Dies liefert die Aussagen über Vertices und die Dimensionen der Quellen der entsprechenden Moduln.

Der Modul $D^{(6,4,2,1)}$ ist isomorph zum Spechtmodul $S := S^{(6,4,1^3)}$. Wir behandeln diesen mit dem Computer. Dazu schränken wir S auf P_9 ein. Diese Einschränkung besitzt 119 unzerlegbare projektive Summanden. Unter den restlichen unzerlegbaren direkten Summanden sind

unter anderem drei isomorphe Moduln der Dimension 3, deren Vertizes zu P_3^3 konjugiert sind. Alle weiteren Summanden haben kleinere Vertizes. Somit hat $D^{(6,4,2,1)}$ Vertex P_3^3 und triviale Quellen.

Alle anderen irreduziblen Moduln dieses Blocks sind irreduzible Spechtmoduln zu Hakenpartitionen. Deren Vertizes erhalten wir aus Bemerkung 6.1.1 (e). Außerdem haben diese Moduln wieder triviale Quellen.

Die Aussagen über die irreduziblen Moduln im Block mit 3-Kern $(2, 1^2)$ erhalten wir durch Mullineux-Konjugation.

Wir betrachten den Hauptblock. Mit $i = 0$ erhalten wir dann zunächst:

$$\begin{aligned} (11, 2) &\longleftrightarrow (11, 1), & (10, 3) &\longleftrightarrow (9, 3), & (8, 5) &\longleftrightarrow (8, 4), \\ (7, 4, 1^2) &\longleftrightarrow (6, 4, 1^2), & (7, 3, 2, 1) &\longleftrightarrow (6, 3, 2, 1), & (9, 2, 1^2) &\longleftrightarrow (9, 2, 1), \\ (6, 3^2, 1) &\longleftrightarrow (6, 3^2). \end{aligned}$$

Dies liefert die Aussagen über Vertizes und Quellen der entsprechenden Moduln und ihrer Mullineux-konjugierten.

Die Moduln $D^{(13)}$, $D^{(10,2,1)}$, $D^{(7,3^2)}$ und deren Mullineux-konjugierte sind irreduzible Spechtmoduln zu Hakenpartitionen. Sie haben also triviale Quellen, und die Aussagen über ihre Vertizes folgen aus Bemerkung 6.1.1 (e).

Den Modul $D^{(7,5,1)}$ behandeln wir schließlich mit dem Computer. Wir schränken ihn dazu auf P_{12} ein. Unter den unzerlegbaren direkten Summanden dieser Einschränkung befindet sich einer der Dimension 154 mit Vertex P_{12} . Dieser ist auch absolut unzerlegbar. Folglich hat $D^{(7,5,1)}$ Vertex P_{12} und 154-dimensionale Quellen.

$n = 14$

Blöcke		Def.	Partitionen		Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
(2)	(1 ²)	P ₁₂	(14)	(7 ²)	1	P ₁₂	1	(14)	(1 ¹⁴)
			(11, 3)	(6, 5, 2, 1)	273	P ₃ ⁴	1	(11, 3)	(2 ³ , 1 ⁸)
			(11, 2, 1)	(6, 5, 3)	286	P ₁₂	1	(11, 1 ³)	(4, 1 ¹⁰)
			(10, 3, 1)	(5 ² , 2, 1 ²)	1442	P ₁₂	62	-	-
			(9, 3, 1 ²)	(5, 4, 3, 1 ²)	5277	P ₁₂	120	-	-
			(8, 6)	(4 ² , 3 ²)	1000	P ₁₂	28	-	-
			(8, 5, 1)	(4 ² , 3, 2, 1)	3562	P ₁₂	154	-	-
			(8, 4, 1 ²)	(6, 3 ² , 1 ²)	3367	P ₁₂	235	-	-
			(8, 3 ²)	(7, 4, 3)	1716	P ₃ ⁴	1	(8, 1 ⁶)	(7, 1 ⁷)
			(8, 3, 2, 1)	(6, 4, 3, 1)	6369	P ₃ ⁴	4	-	-
			(7, 6, 1)	(13, 1)	13	P ₁₂	1	(2, 1 ¹²)	(13, 1)
			(7, 3, 2 ²)	(7, 3, 2, 1 ²)	9996	P ₁₂	147	-	-
			(6 ² , 1 ²)	(12, 2)	64	P ₁₂	10	-	-
			(6, 3 ² , 2)	(8, 2 ² , 1 ²)	9309	P ₁₂	210	-	-
			(5 ² , 4)	(10, 2 ²)	715	P ₁₂	1	(5, 1 ⁹)	(10, 1 ⁴)
			(5 ² , 2 ²)	(10, 4)	560	P ₁₂	62	-	-
			(5, 4 ² , 1)	(9, 2 ² , 1)	4213	P ₁₂	7	-	-
			(5, 4, 3, 2)	(9, 5)	428	P ₁₂	131	-	-
			(5, 3 ² , 2, 1)	(7, 4, 2, 1)	20747	P ₁₂		-	-
			(4, 3 ² , 2, 1 ²)	(7, 5, 2)	13012	P ₁₂	154	-	-
(3, 1 ²)		P ₉	(12, 1 ²) (6 ² , 2)		78	P ₉	1	(12, 1 ²)	(3, 1 ¹¹)
			(9, 4, 1) (5, 4, 2 ² , 1)		4290	P ₉	28	-	
			(8, 4, 2) (4 ² , 2 ² , 1 ²)		6357	P ₉	41	-	
			(6, 4 ²) (9, 3, 2)		1287	P ₃ ³	1	(6, 1 ⁸)	(9, 1 ⁵)
			(6, 4, 2 ²) (6, 3, 2 ² , 1)		28665	P ₃ ³	1	(6, 4, 1 ⁴)	(6, 2 ³ , 1 ²)
(4, 2, 1 ²)		P ₃ ²	(10, 2, 1 ²) (5 ² , 3, 1)		2079	P ₃ ²	1	(10, 2, 1 ²)	(4, 2, 1 ⁸)
			(7, 5, 1 ²) (4, 3 ² , 2 ²)		15444	P ₃ ²	1	(7, 5, 1 ²)	(4, 2 ⁴ , 1 ²)
			(7, 3 ² , 1)		9504	P ₃ ²	1	(7, 2, 1 ⁵)	
(6, 4, 2, 1 ²)	(5, 3, 2 ² , 1 ²)	1	(6, 4, 2, 1 ²)	(5, 3, 2 ² , 1 ²)	69498	1	1	(6, 4, 2, 1 ²)	(5, 3, 2 ² , 1 ²)

Die Blöcke mit 3-Kernen (4, 2, 1²), (6, 4, 2, 1²) und (5, 3, 2², 1²) haben abelsche Defektgruppen, und alle irreduziblen Moduln dieser Blöcke sind Spechtmoduln, haben also die jeweiligen Defektgruppen als Vertizes sowie triviale Quellen.

Für den Block mit 3-Kern (3, 1²) erhalten wir mit $i = 1$:

$$(9, 4, 1) \longleftrightarrow (9, 4), \quad (8, 4, 2) \longleftrightarrow (7, 4, 2), \quad (6, 4, 2^2) \longleftrightarrow (6, 4, 2, 1).$$

Daraus ergeben sich die Aussagen über Vertizes und Quellen der zugehörigen Moduln und der dazu Mullineux-konjugierten. Alle weiteren irreduziblen Moduln dieses Blocks sind Spechtmoduln zu Hakenpartitionen. Deren Vertizes erhalten wir wieder aus Bemerkung 6.1.1.

Schließlich betrachten wir den Hauptblock. Die Aussagen über den konjugierten Block folgen dann wieder sofort. Mit $i = 1$ gilt hier:

$$\begin{aligned}
(10, 3, 1) &\longleftrightarrow (10, 3), & (9, 3, 1^2) &\longleftrightarrow (9, 2, 1^2), & (8, 5, 1) &\longleftrightarrow (7, 5, 1), \\
(8, 4, 1^2) &\longleftrightarrow (7, 4, 1^2), & (7, 3, 2^2) &\longleftrightarrow (7, 3, 2, 1), & (6^2, 1^2) &\longleftrightarrow (6, 5, 1^2), \\
(6, 3^2, 2) &\longleftrightarrow (6, 3^2, 1), & (5^2, 2^2) &\longleftrightarrow (5^2, 2, 1), & (5, 4, 3, 2) &\longleftrightarrow (4^2, 3, 2), \\
(4, 3^2, 2, 1^2) &\longleftrightarrow (4, 3^2, 2, 1).
\end{aligned}$$

So kommen Vertizes und Quellen der entsprechenden Moduln zustande.

Wegen $Y^{(11,3)} \cong S^{(11,3)} \cong D^{(11,3)}$ hat $D^{(11,3)}$ nach Bemerkung 5.3.3 Vertex P_3^4 und triviale Quellen.

Die irreduziblen Moduln $D^{(11,2,1)}$, $D^{(8,3^2)}$, $D^{(14)}$, $D^{(7,6,1)}$ und $D^{(5^2,4)}$ sind Spechtmoduln zu Hakenpartitionen. Damit folgen die Aussagen über ihre Vertizes wieder aus Bemerkung 6.1.1 (e).

Die Moduln $D^{(5,4^2,1)}$ und $D^{(5,3^2,2,1)}$ haben P_{12} als Vertex, da ihre Dimensionen nicht durch 3 teilbar sind.

Die Vertizes und Dimensionen der Quellen der restlichen beiden Moduln des Hauptblocks sowie die Dimension der Quellen von $D^{(5,4^2,1)}$ wurden schließlich mit dem Computer berechnet.

$n = 15$

Blöcke		Def.	Partitionen		Dim.	Vertex	Quelle	Specht	
(4, 2)	$(2^2, 1^2)$	P_9	(13, 2)	$(7, 6, 1^2)$	90	P_9	1	(13, 2)	$(2^2, 1^{11})$
			(10, 5)	$(5^2, 3, 2)$	1548	P_9	28	-	-
			(10, $2^2, 1$)	$(5^2, 4, 1)$	7722	P_3^3	1	$(10, 2, 1^3)$	$(5, 2, 1^8)$
			(7, 5, 3)	$(4, 3^2, 2^2, 1)$	43497			-	-
			(7, 5, 2, 1)	$(5, 3^2, 2^2)$	61425	P_3^3	1	$(7, 5, 1^3)$	$(5, 2^4, 1^2)$
			(7, 4, 3, 1)	$(8, 3^2, 1)$	19305	P_3^3	1	$(7, 2, 1^6)$	$(8, 2, 1^5)$
			(7, $3^2, 1^2$)	$(7, 3^2, 2)$	32670	P_3^3	4	-	-
			(6, 5, 3, 1)	$(11, 2, 1^2)$	2925	P_9	1	$(4, 2, 1^9)$	$(11, 2, 1^2)$
			($5^2, 3, 1^2$)	$(10, 3, 1^2)$	8163	P_9	7	-	-
			($4^2, 3, 2^2$)	$(8, 5, 1^2)$	26937	P_9	41	-	-
(5, 3, 1)	$(3, 2^2, 1^2)$	P_3^2	(11, 3, 1)	$(6, 5, 2, 1^2)$	2835	P_3^2	1	(11, 3, 1)	$(3, 2^2, 1^8)$
			(8, 6, 1)	$(4^2, 3^2, 1)$	11583	P_3^2	1	(8, 6, 1)	$(3, 2^5, 1^2)$
			(8, $3, 2^2$)	$(6, 4, 3, 1^2)$	44550	P_3^2	1	$(8, 3, 1^4)$	$(6, 2^2, 1^5)$
			(5, $4^2, 2$)	$(9, 2^2, 1^2)$	24948	P_3^2	1	$(5, 3, 1^7)$	$(9, 2^2, 1^2)$
			($5, 3^2, 2, 1^2$)	$(7, 4, 2, 1^2)$	159327	P_3^2	4	-	-
(6, 4, 2)	$(3^2, 2^2, 1^2)$	P_3	(9, 4, 2)	$(5, 4, 2^2, 1^2)$	22113	P_3	1	(9, 4, 2)	$(3^2, 2^2, 1^5)$
			(6, $4, 2^2, 1$)	$(6, 3, 2^2, 1^2)$	221130	P_3	1	$(6, 4, 2, 1^3)$	$(6, 3, 2^2, 1^2)$

Die irreduziblen Moduln in den Blöcken vom 3-Gewicht 1 sind irreduzible Spechtmoduln. Die Blöcke vom 3-Gewicht 2 sind Scopes-äquivalent zum Hauptblock beziehungsweise zum alternierenden Block von $F\mathfrak{S}_8$. So erhalten wir jeweils die Aussagen über die Quellen der irreduziblen Moduln dieser Blöcke.

Setzen wir $i := 0$, so gilt für den Block mit 3-Kern (4, 2):

$$\begin{array}{lll}
 (13, 2) \longleftrightarrow (12, 1), & (10, 5) \longleftrightarrow (9, 4), & (10, 2^2, 1) \longleftrightarrow (9, 2^2), \\
 (7, 5, 2, 1) \longleftrightarrow (6, 4, 2, 1), & (7, 4, 3, 1) \longleftrightarrow (6, 4, 3), & (7, 3^2, 1^2) \longleftrightarrow (6, 3, 2, 1^2), \\
 (6, 5, 3, 1) \longleftrightarrow (6, 5, 2), & (5^2, 3, 1^2) \longleftrightarrow (5, 4, 2, 1^2), & (4^2, 3, 2^2) \longleftrightarrow (4^2, 2^2, 1).
 \end{array}$$

Auf diese Weise erhalten wir die Vertices und Quellen der jeweiligen Moduln. Die Aussagen über

die irreduziblen Moduln des konjugierten Blocks mit Kern $(2^2, 1^2)$ folgen dann wieder sofort.

Blöcke	Def.	Partitionen	Dim.	Vertex	Quelle	Specht
\emptyset	P_{15}	(15) (8, 7)	1	P_{15}	1	(15) (1^{15})
		(14, 1) $(7^2, 1)$	13	P_{15}	13	-
		(13, 1^2) (7, 6, 2)	78	P_{15}	78	-
		(12, 3) $(6^2, 2, 1)$	337	P_{15}	94	-
		(12, 2, 1) $(6^2, 3)$	286	P_{15}	286	-
		(11, 4) $(6, 5, 2^2)$	560	P_{15}	317	-
		(11, 2^2) $(6, 5, 4)$	715	P_{15}	715	-
		(10, 4, 1) $(5^2, 2^2, 1)$	5732	P_{15}		-
		(10, 3, 2) $(7, 4^2)$	1287	P_{15}		-
		(9, 6) $(5, 4, 3^2)$	1428	P_{15}	456	-
		(9, 5, 1) $(5, 4, 3, 2, 1)$	3562	P_{15}		-
		(9, 4, 1^2) $(5, 4^2, 1^2)$	15365	P_{15}		-
		(9, 3^2) $(8, 4, 3)$	1716	P_{15}		-
		(9, 3, 2, 1) $(6, 4^2, 1)$	10582	P_{15}		-
		(8, 5, 2) $(4^2, 3, 2, 1^2)$	19369	P_{15}		-
		(8, 4, 2, 1) $(6, 3^2, 2, 1)$	24114	P_{15}		-
		(8, 3, 2, 1^2) $(6, 4, 3, 2)$	29106			-
		(7, 4, 2^2) $(7, 3, 2^2, 1)$	38661	P_{15}		-

Schließlich betrachten wir den Hauptblock. Die modularen Branching-Regeln liefern dann zunächst:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mathfrak{S}_{14}}^{\mathfrak{S}_{15}}(D^{(9,6)}) &\cong D^{(8,6)} \oplus D^{(9,5)}, \\ \text{Res}_{\mathfrak{S}_{14}}^{\mathfrak{S}_{15}}(D^{(8,4,2,1)}) &\cong D^{(8,4,1^2)} \oplus D^{(7,4,2,1)}, \\ \text{Res}_{\mathfrak{S}_{14}}^{\mathfrak{S}_{15}}(D^{(7,4,2^2)}) &\cong D^{(6,4,2^2)} \oplus D^{(7,3,2^2)}. \end{aligned}$$

Sind also $\lambda \in \{(9, 6), (8, 4, 2, 1), (7, 4, 2^2)\}$ und P ein Vertex von D^λ mit $P \leq P_{15}$, so ist $P_{12} \leq_{\mathfrak{S}_{15}} P_{15}$. Da D^λ nicht relativ \mathfrak{S}_{14} -projektiv ist und $|P_{15} : P_{12}| = 3$ gilt, hat D^λ in all diesen Fällen Vertex P_{15} .

Der Modul $D^{(13,1^2)}$ hat nach Bemerkung 6.2.4 Vertex P_{15} . Computerberechnungen zeigen außerdem, dass $\text{Res}_{P_{15}}^{\mathfrak{S}_{15}}(D^{(13,1^2)})$ absolut unzerlegbar ist.

Nach Lemma 6.3.3 und Korollar 6.3.6 gilt ferner $D^{(10,3,2)} = D^{(10,1^5)^R} \cong D_5$ sowie $D^{(9,3^2)} = D^{(9,1^6)^R} \cong D_6$. Es sei nun P ein Vertex von D_5 mit $P \leq P_{15} = P_9 \times P_3^2$. Nach Lemma 6.2.7 wissen wir, dass entweder $P = P_{15}$ oder $P = P_3^5$ gelten muss. Wir nehmen an, dass $P = P_3^5$ gilt. Dann existiert eine zu $\mathfrak{S}_3 \wr C_5$ isomorphe Untergruppe K von \mathfrak{S}_{15} mit $P \trianglelefteq K$ und $|K : P| = 2^5 \cdot 5 \not\equiv 0 \pmod{3}$. Computerberechnungen zeigen ferner, dass $\text{Res}_K^{\mathfrak{S}_{15}}(D_5)$ absolut unzerlegbar ist. Betrachten wir nun D_5 als $\overline{\mathbb{F}}_3\mathfrak{S}_{15}$ -Modul, so ist also der $\overline{\mathbb{F}}_3\mathfrak{S}_{15}$ -Modul $\text{Res}_K^{\mathfrak{S}_{15}}(D_5)$ unzerlegbar. Mit Korollar 2.4.6 erhalten wir daraus den Widerspruch $P_3^5 \in \text{Syl}_3(\mathfrak{S}_{15})$. Demzufolge hat D_5 Vertex P_{15} .

Nun sei Q ein Vertex von D_6 mit $Q \leq P_{15}$. Nach Korollar 6.1.7 ist dann $(P_3)^4 <_{\mathfrak{S}_{15}} Q \leq P_{15}$. Wegen $Z(P_{15}) \leq Q$ folgt mit Lemma 3.1.2 und Bemerkung/Korollar 3.1.6 sofort, dass auch in diesem Fall entweder $Q = P_{15} = P_9 \times P_3^2$ oder $Q = P_3^5$ ist. Wir nehmen $Q = P_3^5$ an, und K sei wieder die obige Untergruppe von \mathfrak{S}_{15} . Computerberechnungen zeigen, dass auch $\text{Res}_K^{\mathfrak{S}_{15}}(D_6)$ absolut unzerlegbar. Betrachten wir also D_6 als $\overline{\mathbb{F}}_3\mathfrak{S}_{15}$ -Modul, so ist auch dessen Einschränkung auf K unzerlegbar. Aus Korollar 2.4.6 folgt dann erneut der Widerspruch $P_3^5 \in \text{Syl}_3(\mathfrak{S}_{15})$. Folglich hat D_6 ebenfalls Vertex P_{15} .

Ferner sind die Einschränkungen von $D^{(10,3,2)}$ und $D^{(9,3^2)}$ auf P_{15} jeweils absolut unzerlegbar. Die restlichen Modul des Hauptblocks, mit Ausnahme von $D^{(8,3,2,1^2)}$ und $D^{(6,4,3,2)}$, sind entweder

Mullineux-konjugiert zu einem der bereits erwähnten Moduln oder haben Dimensionen, die nicht durch 3 teilbar sind. Folglich haben all diese Moduln auch Vertex P_{15} .

$n \geq 16$

Für $n \geq 16$ wurden in erster Linie die Moduln $D_r = \bigwedge^r D^{(n-1,1)}$ mit $n \equiv 0 \pmod{3}$ und $0 \leq r \leq n-2$ untersucht. Die nachfolgende Tabelle enthält die Ergebnisse für $n \leq 27$. In all diesen Fällen handelt es sich bei den Vertizes der Moduln D_r jeweils um die 3-Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n . Dabei kennzeichnen die eingerahmten Einträge diejenigen Vertizes, die nicht aus den theoretischen Ergebnissen in Kapitel 6 folgen, sondern mit dem Computer berechnet wurden. Die grau hinterlegten Einträge kennzeichnen die Vertizes, die zu Moduln gehören, deren Dimensionen nicht durch 3 teilbar sind.

3	6	9	12	15	18	21	24	27	n/r
P_3	P_6	P_9	P_{12}	P_{15}	P_{18}	P_{21}	P_{24}	P_{27}	0
P_3	P_6	P_9	P_{12}	P_{15}	P_{18}	P_{21}	P_{24}	P_{27}	1
	P_6	P_9	P_{12}	P_{15}	P_{18}	P_{21}	P_{24}	P_{27}	2
	P_6	P_9	P_{12}	P_{15}	P_{18}	P_{21}	P_{24}	P_{27}	3
	P_6	P_9	P_{12}	P_{15}	P_{18}		P_{24}	P_{27}	4
		P_9	P_{12}	P_{15}	P_{18}			P_{27}	5
		P_9	P_{12}	P_{15}	P_{18}			P_{27}	6
		P_9	P_{12}	P_{15}	P_{18}			P_{27}	7
			P_{12}	P_{15}					8
			P_{12}	P_{15}	P_{18}	P_{21}	P_{24}	P_{27}	9
			P_{12}	P_{15}	P_{18}	P_{21}	P_{24}	P_{27}	10
				P_{15}	P_{18}		P_{24}	P_{27}	11
				P_{15}	P_{18}		P_{24}	P_{27}	12
				P_{15}	P_{18}		P_{24}	P_{27}	13
					P_{18}				14
					P_{18}			P_{27}	15
					P_{18}	P_{21}		P_{27}	16
						P_{21}			17
						P_{21}	P_{24}	P_{27}	18
						P_{21}	P_{24}	P_{27}	19
							P_{24}	P_{27}	20
							P_{24}	P_{27}	21
							P_{24}	P_{27}	22
								P_{27}	23
								P_{27}	24
								P_{27}	25

Kapitel 10

Fragen und Vermutungen

Wir werden an dieser Stelle nun abschließend einige der im Verlauf dieser Arbeit entstandenen Vermutungen und offen gebliebenen Fragen zusammenfassen. Dazu seien wieder p eine Primzahl, F ein Körper der Charakteristik p und $n \in \mathbb{N}^*$.

Allgemeine Fragen

In Lemma 4.3.2 haben wir die Gruppen der Ordnungen $\leq p^3$ bestimmt, welche potentiell als Vertizes irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln in Frage kommen. In diesem Zusammenhang kamen die elementarabelschen Gruppen $E_{p^2} \leq P_{p^2}$ und $E_{p^3} \leq P_{p^3}$ der Ordnung p^2 beziehungsweise p^3 vor. Dabei operiert E_{p^2} regulär auf $\{1, \dots, p^2\}$, und E_{p^3} operiert regulär auf $\{1, \dots, p^3\}$.

Für $p = 2$ konnten wir ferner explizit angeben, welche Gruppen auch tatsächlich als Vertizes irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln auftreten. Unter anderem ist $E_4 = Q_4$ Vertex des irreduziblen $F\mathfrak{S}_4$ -Moduls $D^{(3,1)}$, und E_8 ist Vertex des irreduziblen $F\mathfrak{S}_{14}$ -Moduls $D^{(5,4,3,2)}$.

Allgemein enthält für beliebiges $p \in \mathbb{P}$, $k \geq 1$ und $n = (p^{2k+1} - p^{2k} + p^{k+1} + p^k)/2$ der Block von $F\mathfrak{S}_n$ mit p -Kern $((p^k - 1)(p - 1), (p^k - 2)(p - 1), \dots, 2(p - 1), p - 1)$ und p -Gewicht p^k den irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Modul zur Partition

$$\lambda := ((p^k - 1)(p - 1) + p, (p^k - 2)(p - 1) + p, \dots, 2(p - 1) + p, p - 1 + p, p).$$

Ferner gilt jeweils $D^\mu | \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-p^k}}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ und $D^\nu | \text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D^\lambda)$ mit

$$\mu = (p^k(p - 1), (p^k - 1)(p - 1), \dots, 2(p - 1), p - 1) \text{ und } \nu = ((p^k - 1)(p - 1) + p, \dots, (p - 1) + p, p, 1).$$

Sowohl D^μ als auch D^ν ist projektiv.

Frage: Ist dann $E_{p^{k+1}}$ ein Vertex von D^λ ? Dabei bezeichne $E_{p^{k+1}}$ stets eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^{k+1} , welche regulär auf $\{1, \dots, p^{k+1}\}$ operiert.

Betrachtet man die Ergebnisse der Computerberechnungen, so zeigt sich, dass im Fall $p > 2$, $p|n$ die irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln des Hauptblocks in allen Beispielen die p -Sylogruppen von \mathfrak{S}_n als Vertizes haben. Im Fall $p = 2$, $2|n$ haben die untersuchten irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln aus dem Hauptblock entweder die 2-Sylogruppen von \mathfrak{S}_n oder die 2-Sylogruppen von \mathfrak{A}_n als Vertizes, abhängig davon, ob die entsprechende Partition eine S -Partition ist.

Vermutung: Dies ist allgemein richtig.

Spechtmoduln und Young-Moduln

In Kapitel 5 haben wir für $p > 2$ gesehen, dass sich die Vertizes eines unzerlegbaren verallgemeinerten Young-Moduls $Y(\lambda|p\mu)$ rein kombinatorisch in Abhängigkeit vom Parameter $(\lambda|p\mu)$ bestimmen lassen. Insbesondere sind irreduzible Spechtmoduln stets verallgemeinerte Young-Moduln. Der entsprechende Parameter ist allerdings im Allgemeinen nur für irreduzible Spechtmoduln zu p -regulären und zu p -beschränkten Partitionen bekannt.

Frage: Es sei S'' ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul. Wie sehen dann die Partitionen λ und μ mit $S'' \cong Y(\lambda|p\mu)$ aus? [siehe Vermutung 5.4.2.]

Die Ergebnisse aus Kapitel 5 zeigen weiter, dass die unzerlegbaren verallgemeinerten Young-Moduln beziehungsweise die gewöhnlichen Young-Moduln in Charakteristik 2 stets triviale Quellen haben. Die Computerberechnungen legen die Vermutung nahe, dass die irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen mit trivialen Quellen genau die irreduziblen Spechtmoduln, d.h. die irreduziblen (verallgemeinerten) Young-Moduln sind.

Vermutung: Die irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln mit trivialen Quellen sind genau die irreduziblen Spechtmoduln.

Äußere Potenzen des natürlichen irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduls

Es sei $p > 2$. Die in Kapitel 6 untersuchten äußeren Potenzen $D_r := \bigwedge^r D$ des natürlichen irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduls $D := D^{(n-1,1)}$ sind für $0 \leq r \leq \dim(D)$ wieder irreduzibel. Im Fall $p|n$ liegt D_r außerdem im Hauptblock von $F\mathfrak{S}_n$, sollte nach obiger Vermutung also die p -Sylowgruppen von \mathfrak{S}_n als Vertizes haben. Sowohl für alle theoretisch behandelten als auch für alle mit dem Computer untersuchten Moduln war dies der Fall.

Wir hatten weiter gesehen, dass wir die irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln zu den Hakenpartitionen als Spezialfälle dieser äußeren Potenzen erhalten, da $D_r \cong D^{(n-r,1^r)}$ für $r < p$ gilt. Mit Ausnahme des Falls $r = p-1$, $n = xp$ und $x \equiv 1 \pmod{p}$ kennen wir die Vertizes der Moduln D_r mit $r < p$.

Frage: Lassen sich ähnliche Methoden wie die in Satz 6.2.5 verwendeten finden, um auch die Vertizes der Moduln D_{p-1} für den Fall $n = xp$ und $x \equiv 1 \pmod{p}$ zu bestimmen? Dann wären die Vertizes der irreduziblen Moduln zu Hakenpartitionen vollständig klassifiziert.

Scopes-Äquivalenz und Blöcke von bestimmtem Gewicht

In Abschnitt 4.2 konnten wir für $p = 2$ durch Anwendung der Scopes-Äquivalenz auf unsere Computerberechnungen die Vertizes derjenigen irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen klassifizieren, welche in 2-Blöcken vom Gewicht 4 liegen.

Für $p = 3$ kennen wir die Scopes-Klassen von Blöcken vom Gewicht ≤ 2 . Nach [20] liefern die folgenden Blöcke ein Repräsentantensystem für die Scopes-Klassen von 3-Blöcken vom Gewicht 3:

n	Block
9	\emptyset
10	(1)
11	(2)
11	(1^2)
13	$(3, 1)$
13	$(2, 1^2)$
14	$(3, 1^2)$
15	$(4, 2)$
15	$(2^2, 1^2)$
19	$(5, 3, 1^2)$
19	$(4, 2^2, 1^2)$
25	$(6, 4, 2^2, 1^2)$

Kennt man die Vertizes der irreduziblen Moduln in den obigen Blöcken, so kennt man nach Bemerkung 4.2.5 die Vertizes aller irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen, welche in 3-Blöcken vom Gewicht 3 liegen. Dabei besitzt $F\mathfrak{S}_n$ für $n \in \{11, 13, 15, 19\}$ jeweils zwei Blöcke

vom Gewicht 3, welche jedoch konjugiert zueinander sind. Die irreduziblen Moduln in diesen Blöcken besitzen also jeweils dieselben Vertizes. Außerdem genügt es sogar, die Vertizes der irreduziblen $F\mathfrak{S}_n$ -Moduln für $n \leq 15$ zu bestimmen. Wiederholtes Anwenden der modularen Branching-Regeln liefert nämlich Folgendes: Sind $n \geq 16$ und D^λ ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_n$ -Modul aus einem Block vom Gewicht 3, so existieren ein $m \leq 15$ und ein irreduzibler $F\mathfrak{S}_m$ -Modul D^μ aus einem Block vom Gewicht 3, so dass $D^\lambda | \text{Ind}_{\mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_n}(D^\mu)$ und auch $D^\mu | \text{Res}_{\mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_n}(D^\lambda)$ gilt.

Um für $p = 3$ nun die Vertizes der irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen in Blöcken vom Gewicht 3 klassifizieren zu können, müssen also nur noch die Vertizes des irreduziblen $F\mathfrak{S}_{15}$ -Moduls $D^{(7,5,3)}$ bestimmt werden. Dieser ist nach obiger Vermutung ein Kandidat für einen irreduziblen Modul mit Vertex E_9 . Aber auch, wenn $D^{(7,5,3)}$ nicht Vertex E_9 hat, würde die Kenntnis der Vertizes von $D^{(7,5,3)}$ klären, ob E_9 oder eine der beiden extraspeziellen Gruppen aus Lemma 4.3.2 tatsächlich unter den Vertizes der irreduziblen Moduln symmetrischer Gruppen in Charakteristik 3 vorkommt.

Spinmoduln

Im Zuge der Computerberechnungen wurde unter anderem der $F\mathfrak{S}_n$ -Spinmodul $D(n)$ in Charakteristik 2 untersucht. Dieser ist durch die Partition $(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} - 1)$ im Fall $2|n$ und durch die Partition $(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2})$ im Fall $2 \nmid n$ parametrisiert. Für $n \leq 27$ liefern die Berechnungen Folgendes: Sind P ein Vertex von $D(n)$ und $n = \sum_{i=0}^{s_n} \alpha_i(n) 2^i$ die 2-adische Entwicklung von n , so gilt:

$$P \sim_{\mathfrak{S}_n} \begin{cases} Q_n & , \text{ falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \prod_{i=0}^{s_n} (Q_{2^i})^{\alpha_i(n)} & , \text{ falls } n \equiv 1, 3 \pmod{4} \\ P_n & , \text{ falls } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Dabei wurden die Fälle $n \leq 15$ bereits in [70] behandelt.

Vermutung: Die Vertizes des $F\mathfrak{S}_n$ -Spinmoduls haben stets die oben angegebene Form.

Anhang A

Dimensionen

Partition	17	16	15	14	Dimension
(18)					1
(17,1)					16
(16,2)					118
(15,3)					544
(15,2,1)					1344
(14,4)					1582
(13,5)					3808
(14,3,1)		(13,2,1)			≥ 1792
(12,6)					4488
(10,8)					256
(11,7)					6528
(13,4,1)			(12,3)		≥ 2016
(13,3,2)	(12,3,2);(13,3,1)				19124
(12,5,1)		(11,4,1)			≥ 21504
(9,8,1)					4096
(11,6,1)			(10,5)		≥ 7728
(9,5,4)	(8,5,4);(9,5,3)				170494
(9,6,3)			(8,5,2)		≥ 192192
(8,6,4)	(7,6,4)				55808
(8,7,2,1)				(7,6,1)	≥ 18432
(10,5,2,1)				(9,4,1)	≥ 91392
(10,4,3,1)	(10,4,2,1);(9,4,3,1)				492386
(9,6,2,1)		(8,5,2,1)			≥ 532480
(9,5,3,1)	(8,5,3,1)				225760
(7,6,4,1)		(6,5,4,1)			≥ 442368
(8,6,3,1)	(8,6,2,1);(7,6,3,1)				202368
(9,4,3,2)				(8,3,2,1)	≥ 559104
(8,5,4,1)				(7,4,3)	≥ 261120
(6,5,4,3)				(5,4,3,2)	≥ 860160
(7,6,3,2)				(6,5,2,1)	≥ 319488
(8,5,3,2)		(7,4,3,2)			≥ 1003520
(7,5,4,2)	(6,5,4,2);(7,5,3,2)				574464
(8,4,3,2,1)			(8,4,2,1)		≥ 145560
(6,5,4,2,1)			(5,4,3,2,1)		≥ 1757184
(7,5,3,2,1)			(6,5,3,1)		≥ 139776

Die obige Tabelle beinhaltet die 2-regulären Partitionen von 18 sowie untere Schranken für die Dimensionen der entsprechenden irreduziblen $F\mathfrak{S}_{18}$ -Moduln. Dabei sei F ein Körper der Cha-

rakteristik 2. Die Einträge dieser Tabelle seien wie folgt zu verstehen: Steht für $\lambda \in \mathcal{P}_{18,2}$ und $m \in \{14, 15, 16\}$ in Spalte „ m “ eine Partition $\mu \in \mathcal{P}_{m,2}$, so gilt $(n - m)!D^\mu | \text{Res}_{\mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{18}}(D^\lambda)$ nach den modularen Branching-Regeln. Enthält die Spalte „17“ eine Partition μ (beziehungsweise zwei Partitionen μ und ν) von 17, so gilt $\text{Res}_{\mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{18}}(D^\lambda) \cong D^\mu$ (beziehungsweise $\text{Res}_{\mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{18}}(D^\lambda) \cong D^\mu \oplus D^\nu$). Aus der Kenntnis der Dimensionen der irreduziblen $F\mathfrak{S}_m$ -Moduln, erhält man dann die jeweiligen unteren Schranken für die Dimensionen der irreduziblen $F\mathfrak{S}_{18}$ -Moduln. Stehen in einer Zeile nur die Partition λ von 18 und die Dimension von D^λ , so wurde diese mittels bekannter Formeln oder mit dem Computer berechnet.

Anhang B

Quellcodes der Programme

Im Folgenden werden wir kurz eine Zusammenfassung der unter MAGMA implementierten Funktionen geben und diese anschließend näher erläutern. Dabei sind alle mit dem Computer behandelten Moduln wieder **Rechtsmoduln**.

- Funktionsname:** `ChangeField`
Eingabe: ein endlicher Körper F und eine Matrix `mat` mit Einträgen aus \mathbb{Z} oder einem Teilkörper von F
Ausgabe: eine Matrix mit Einträgen aus F , die aus `mat` dadurch entsteht, dass die Einträge zunächst, falls nötig, modulo p reduziert und anschließend als Elemente in F aufgefasst werden
Aufruf: `ChangeField(F,mat);`
- Funktionsname:** `SpechtModule`
Eingabe: eine positive natürliche Zahl n , eine Primzahl p und eine Partition `lambda` von n
Ausgabe: der $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul zur Partition `lambda`
Aufruf: `SpechtModule(n,p,lambda);`
- Funktionsname:** `ProjSummands`
Eingabe: eine p -Gruppe H und ein FH -Modul M , wobei p eine Primzahl und F ein endlicher Körper mit $\text{char}(F) = p$ seien. Der Modul M besitze m unzerlegbare projektive Summanden M_1, \dots, M_m für ein $m \in \mathbb{N}$.
Ausgabe: der Faktormodul $M/(M_1 \oplus \dots \oplus M_l)$ für ein $l \leq m$
Aufruf: `ProjSummands(H,M);`
- Funktionsname:** `CyclicVertexSummands`
Eingabe: eine p -Gruppe P und ein FP -Modul M für einen endlichen Körper F mit $\text{char}(F) = p$
Ausgabe: ein Faktormodul M/N , wobei N eine direkte Summe unzerlegbarer Untermoduln von M ist, welche zyklische Vertizes haben
Aufruf: `CyclicVertexSummands(P,M);`
- Funktionsname:** `ExteriorPower`
Eingabe: ein FG -Modul W für einen endlichen Körper F und eine Gruppe G sowie eine natürliche Zahl m
Ausgabe: der FG -Modul $\bigwedge^m W$
Aufruf: `ExteriorPower(W,m);`

Funktionsname: SpinmoduleOdd
Eingabe: eine natürliche Zahl $m \geq 1$
Ausgabe: der irreduzible $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{2m+1}$ -Modul zur Partition $(m+1, m)$
Aufruf: SpinmoduleOdd(m);

Funktionsname: SpinmoduleEven
Eingabe: eine natürliche Zahl $m \geq 2$
Ausgabe: der irreduzible $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_{2m}$ -Modul zur Partition $(m+1, m-1)$
Aufruf: SpinmoduleEven(m);

B.1 Koeffizientenkörper

```

1 ChangeField:=function(F,mat)
2   r:=NumberOfRows(mat);
3   c:=NumberOfColumns(mat);
4   new:=[[mat[i][j]*One(F) : j in [1..c]] : i in [1..r]];
5   return Matrix(new);
6 end function;
```

B.2 Spechtmoduln

Bemerkung B.2.1. Es seien $n \in \mathbb{N}^*$, $g \in \mathfrak{S}_n$ und $\lambda \vdash n$. Dann berechnet die MAGMA-Funktion `SymmetricRepresentation(lambda,g)` die Matrix $\Delta(g^{-1})^T$, wobei Δ eine vom $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul S^λ induzierte Matrixdarstellung von $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ ist. Ferner sind die Einträge von $\Delta(g^{-1})^T$ stets ganzzahlig. Wir können diese also mittels der Funktion `ChangeField` modulo p reduzieren und erhalten so eine Matrix $\overline{\Delta}(g^{-1})^T$ mit Einträgen in \mathbb{F}_p . Setzen wir nun $\Gamma(g) := \overline{\Delta}(g)$, so liefert uns das eine vom $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul S^λ induzierte Matrixdarstellung Γ von $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$. Die nachfolgende Funktion `SpechtModule` konstruiert genau auf diese Weise die beiden Matrizen $\Gamma((1, \dots, n))$ und $\Gamma((1, 2))$ und gibt den $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ -Spechtmodul S^λ zurück.

```

1 SpechtModule:=function(n,p,lambda);
2   G:=Sym(n); // Erzeuger sind G.1=(1,...,n) und G.2=(1,2)
3   F:=GF(p);
4   gens:=[SymmetricRepresentation(lambda,G.i) : i in [1..2]];
5   gens:=[ChangeField(F,gens[i]) : i in [1..2]];
6   gens:=[Transpose(gens[i]^~1) : i in [1..2]];
7   S:=GModule(G,gens);
8   return S;
9 end function;
```

Bemerkung B.2.2. Mittels der MAGMA-Funktion `ConstituentsWithMultiplicities(S)` können wir die Kompositionsfaktoren von S und deren Vielfachheiten bestimmen. Auf diese Weise erhalten wir also die irreduziblen $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ -Moduln D^μ , welche zu Kompositionsfaktoren von S^λ isomorph sind.

B.3 Abspalten projektiver Summanden

Die nachfolgende Funktion basiert auf dem Algorithmus zum Abspalten unzerlegbarer projektiver Summanden aus Bemerkung 8.1.1.

```

1 ProjSummands:=function(H,M)
2   hilf:=true;
3   while hilf eq true do
```

```

4   if Dimension(M) gt 0 then
5       i:=0;
6       bool:=false;
7       while bool eq false do
8           vec:=Random(M);
9           test:=sub<M|vec>;
10          if Dimension(test) eq Order(H) then //Dann ist test ein
                                                    //projektiver direkter
                                                    //Summand von M.
11              M:=quo<M|vec>;
12              bool:=true;
13          elif i lt 10 then
14              i:= i+1;
15          else
16              hilf:=false;
17              bool:=true;
18          end if;
19      end while;
20  else
21      hilf:=false;
22  end if;
23 end while;
24 return M;
25 end function;

```

B.4 Abspalten unzerlegbarer direkter Summanden mit zyklischen Vertizes

Die nachfolgende Funktion basiert auf dem Algorithmus zum Abspalten unzerlegbarer Summanden mit zyklischen Vertizes aus Bemerkung 8.1.2.

```

1   CyclicVertexSummands:=function(P,M);
2   M:=ProjSummands(P,M);
3   cyc:=CyclicSubgroups(P);
4   cyc:=[x'subgroup: x in cyc|x'order gt 1];
5   for j in [1..#cyc] do
6       cgens:=Generators(cyc[j]);
7       for g in cgens do
8           if Order(g) eq Order(cyc[j]) then
9               C:=sub<cyc[j]|g>;
10          end if;
11      end for;
12      c:=Order(P)/Order(C);
13      K:=CoefficientRing(M);
14      p:=Characteristic(K);
15      if Dimension(M) ge c then
16          resquo:=Restriction(M,C);
17          actsquo:=ActionGenerators(resquo);
18          hilf:=true;
19          while hilf eq true do
20              if Dimension(M) ge c then
21                  acts:=actsquo;
22                  fix:=Eigenspace(acts[1],1);

```

```
23     i:=0;
24     bool:=false;
25     while bool eq false do
26         vec:=Random(fix);
27         sub:=sub<M|vec>;
28         if Dimension(sub) eq c then // Dann ist sub isomorph zu Ind_C^P(F).
29             q:=quo<M|sub>;
30             resquo:=Restriction(q,C);
31             ressub:=Restriction(sub,C);
32             sum:=DirectSum(ressub,resquo);
33             actssum:=ActionGenerators(sum);
34             if IsSimilar(acts[1],actssum[1]) eq true then // Dann ist sub ein
                                                            //direkter Summand
                                                            //von M.
35                 actsquo:=ActionGenerators(resquo);
36                 M:=q;
37                 bool:=true;
38             else
39                 hilf:=false;
40                 bool:=true;
41             end if;
42         elif i lt 10 then
43             i:=i+1;
44         else
45             hilf:=false;
46             bool:=true;
47         end if;
48     end while;
49     else
50         hilf:=false;
51     end if;
52 end while;
53 end if;
54 end for;
55 return M;
56 end function;
```

B.5 Äußere Potenzen eines FG -Moduls

Bemerkung B.5.1. Es seien F ein Körper und V ein F -Vektorraum der Dimension n mit F -Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$. Ferner sei $f \in \text{Hom}_F(V, V)$. Dann ist also $f(b_r) = \sum_{i=1}^n a_{ir} b_i$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_{ir} \in F$ für alle $i, r = 1, \dots, n$. Für $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun die F -lineare Abbildung $\bigwedge^m f : \bigwedge^m V \rightarrow \bigwedge^m V$, $v_1 \wedge \dots \wedge v_m \mapsto f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_m)$. Bekanntlich ist $\dim(\bigwedge^m V) = \binom{n}{m} =: d$, und $\mathfrak{B} := \{b_{r_1} \wedge \dots \wedge b_{r_m} \mid 1 \leq r_1 < \dots < r_m \leq n\}$ ist eine F -Basis von $\bigwedge^m V$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \left(\bigwedge^m f\right)(b_{r_1} \wedge \dots \wedge b_{r_m}) &= f(b_{r_1}) \wedge \dots \wedge f(b_{r_m}) = \left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 r_1} b_{i_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_m=1}^n a_{i_m r_m} b_{i_m}\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1 r_1} \cdots a_{i_m r_m} (b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_m}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{i_1, \dots, i_m\})} a_{\sigma(i_1) r_1} \cdots a_{\sigma(i_m) r_m} (b_{\sigma(i_1)} \wedge \dots \wedge b_{\sigma(i_m)}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \Delta_f(i_1, \dots, i_m; r_1, \dots, r_m) (b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_m}). \end{aligned}$$

Dabei sei $\Delta_f(i_1, \dots, i_m; r_1, \dots, r_m) := \det((a_{i_k r_l})_{k,l=1, \dots, m})$.

Wir wählen nun eine Bijektion

$$\varphi : \{1, \dots, d\} \longrightarrow \{(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}, \quad x \mapsto (\varphi(x)_1, \dots, \varphi(x)_m)$$

und setzen $c_x := b_{\varphi(x)_1} \wedge \dots \wedge b_{\varphi(x)_m}$ für alle $x = 1, \dots, d$. Dann ist $\{c_1, \dots, c_d\}$ eine F -Basis für $\bigwedge^m V$, und für $y = 1, \dots, d$ gilt

$$\left(\bigwedge^m f\right)(c_y) = \sum_{x=1}^d \Delta_f(\varphi(x); \varphi(y)) c_x.$$

Also ist $(\Delta_f(\varphi(x); \varphi(y)))_{x,y=1, \dots, d}$ die Matrix von $\bigwedge^m f$ bezüglich der Basis $\{c_1, \dots, c_d\}$.

Es sei nun zusätzlich $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ eine Gruppe, und V sei ein FG -Modul. Es seien außerdem $\Gamma : FG \rightarrow \text{Mat}(n, F)$ die von V bezüglich der Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ induzierte Matrixdarstellung von FG sowie $f_l : V \rightarrow V$, $b_i \mapsto g_l b_i = \sum_{j=1}^n \Gamma(g_l)_{ji} b_j$ für $l = 1, \dots, k$ die jeweilige F -lineare Abbildung. Mit obigen Bezeichnungen erhalten wir dann eine von $\bigwedge^m V$ bezüglich der Basis $\{c_1, \dots, c_d\}$ induzierte Matrixdarstellung $\Delta : FG \rightarrow \text{Mat}(d, F)$ mit $\Delta(g_l) = (\Delta_{f_l}(\varphi(x); \varphi(y)))_{x,y=1, \dots, d}$ für $l = 1, \dots, k$.

Entsprechend lässt sich auch für einen FG -Rechtsmodul W der FG -Rechtsmodul $\bigwedge^m W$ konstruieren. Die nachfolgende Funktion `ExteriorPower` tut genau dies.

```

1 ExteriorPower:=function(W,m);
2   G:=Group(W);
3   Wgens:=ActionGenerators(W);
4   Wgens:=[Transpose(x): x in Wgens];
5   Glength:=#Wgens;
6   n:=Dimension(W);
7   d:=Binomial(n,m);
8   F:=BaseRing(W);
9   M:={1..n};
10  S:=Subsets(M,m);
11  phi:=[[a: a in b]: b in S];
12  gens:=[];
13  for r in [1..Glength] do

```

```

14 gr:=ZeroMatrix(F,d,d);
15 for x in [1..#phi] do
16   for y in [1..#phi] do
17     z:=ZeroMatrix(F,m,m);
18     for k in [1..m] do
19       for l in [1..m] do
20         z[k][l]:=Wgens[r][phi[y][k]][phi[x][l]];
21       end for;
22     end for;
23     gr[x][y]:=Determinant(z);
24   end for;
25 end for;
26 Append(~gens,gr);
27 end for;
28 T:=GModule(G,gens);
29 return T;
30 end function;

```

B.6 Spinmoduln in Charakteristik 2

Bemerkung B.6.1. Die beiden nachfolgenden Programme dienen dazu, die Spinmoduln in Charakteristik 2 zu konstruieren. Wir verwenden hierfür das in [68], Ex. 4.8 beschriebene Verfahren. Ferner seien F ein Körper der Charakteristik 2, $n \geq 3$ und $D(n)$ der $F\mathfrak{S}_n$ -Spinmodul. D.h. $D(n)$ ist der irreduzible $F\mathfrak{S}_n$ -Modul zur Partition $(m+1, m)$, falls $n = 2m+1$ ist, beziehungsweise $(m+1, m-1)$, falls $n = 2m$ ist, für ein $m \in \mathbb{N}$.

Zuerst betrachten wir den Fall $n = 2m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Außerdem setzen wir $\sigma_i := (i, i+1)$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $E := \langle \sigma_j | j \in \{1, \dots, n-1\}, j \equiv 1 \pmod{2} \rangle$. Dann ist E eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung 2^m , und der reguläre FE -Modul besitzt eine F -Basis der Form

$$\mathfrak{B} := \{1, \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_t} | i_1, \dots, i_t \in \{1, 3, \dots, 2m-1\}, t \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Für ungerade $i \in \{1, \dots, n-1\}$ operiert dann also σ_i in natürlicher Weise auf FE . Für $r \in \{1, \dots, m-1\}$ und $i = 2r$ setzen wir

$$(\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_t}) \sigma_i := \begin{cases} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_t} & , \text{ falls } 2r-1, 2r+1 \in \{i_1, \dots, i_t\} \\ \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_t} (\sigma_{2r+1} + 1) & , \text{ falls } 2r-1 \in \{i_1, \dots, i_t\} \\ & \text{und } 2r+1 \notin \{i_1, \dots, i_t\} \\ \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_t} (\sigma_{2r-1} + 1) & , \text{ falls } 2r-1 \notin \{i_1, \dots, i_t\} \\ & \text{und } 2r+1 \in \{i_1, \dots, i_t\} \\ \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_t} (\sigma_{2r-1} + \sigma_{2r+1} + 1) & , \text{ falls } 2r-1, 2r+1 \notin \{i_1, \dots, i_t\} \end{cases}$$

sowie

$$(\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_t}) \sigma_{2m} := \begin{cases} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_t} & , \text{ falls } 2m-1 \in \{i_1, \dots, i_t\} \\ \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_t} (\sigma_{2m-1} + 1) & , \text{ falls } 2m-1 \notin \{i_1, \dots, i_t\}. \end{cases}$$

Nach [68], L. 4.9 wird FE auf diese Weise zu einem $F\mathfrak{S}_n$ -Modul, welcher isomorph zu $D(n)$ ist. Wir wählen nun eine Bijektion

$$\psi : \{1, \dots, 2^m\} \longrightarrow \mathfrak{P}(\{1, 3, \dots, 2m-1\}),$$

wobei $\mathfrak{P}(\{1, 3, \dots, 2m-1\})$ die Potenzmenge von $\{1, 3, \dots, 2m-1\}$ bezeichne. Auf diese Weise können wir die Basiselemente von $D(n)$ mit den Teilmengen von $\{1, 3, \dots, 2m-1\}$ identifizieren. Dabei entsprechen \emptyset dem Basiselement 1 und $\{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \{1, 3, \dots, 2m-1\}$ mit $t \geq 1$ dem Basiselement $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_t}$.

```

1 SpinmoduleOdd:=function(m);
2   K:=FiniteField(2);
3   n:=2*m+1;
4   M:={1..n-2};
5   for a in M do
6     if IsEven(a) eq true then
7       M:=M diff {a}; // die Menge {1,3,...,2m-1}
8     end if;
9   end for;
10  S:=Subsets(M);
11  psi:=[{@a: a in b@}: b in S];
12  mats:=[];
13  l:=1;
14  mat:=ZeroMatrix(K,2^m,2^m);
15  for r in [1..#psi] do
16    I:=psi[r];
17    if l in I then
18      L:=I diff {@l@};
19    else L:=I join {@l@};
20    end if;
21    for t in [1..#psi] do
22      if L eq psi[t] then
23        mat[r][t]:=1;
24      end if;
25    end for;
26  end for;
27  Append(~mats,mat);
28  for l in [2..n-2] do
29    test:=ZeroMatrix(K,2^m,2^m);
30    if IsOdd(l) eq true then
31      for r in [1..#psi] do
32        I:=psi[r];
33        if l in I then
34          L:=I diff {@l@};
35        else L:=I join {@l@};
36        end if;
37        for t in [1..#psi] do
38          if L eq psi[t] then
39            test[r][t]:=1;
40          end if;
41        end for;
42      end for;
43    else
44      for r in [1..#psi] do
45        I:=psi[r];
46        if l-1 in I and l+1 in I then
47          for t in [1..#psi] do
48            test[r][t]:=0;
49          end for;
50        elif l-1 in I and l+1 notin I then
51          L:=I join {l+1};
52          for t in [1..#psi] do
53            if L eq psi[t] then

```

```

54     test[r][t]:=1;
55     end if;
56     end for;
57     elif l-1 notin I and l+1 in I then
58         L:=I join {l-1};
59         for t in [1..#psi] do
60             if L eq psi[t] then
61                 test[r][t]:=1;
62             end if;
63         end for;
64     else L1:=I join {l-1};
65         L2:=I join {l+1};
66         for t in [1..#psi] do
67             if L1 eq psi[t] then
68                 test[r][t]:=1;
69             end if;
70         end for;
71         for t in [1..#psi] do
72             if L2 eq psi[t] then
73                 test[r][t]:=1;
74             end if;
75         end for;
76     end if;
77 end for;
78 for t in [1..#psi] do
79     test[t][t]:=test[t][t]+1;
80 end for;
81 end if;
82 mat:=test*mat;
83 end for;
84 l:=n-1;
85 test:=ZeroMatrix(K,2^m,2^m);
86 for r in [1..#psi] do
87     I:=psi[r];
88     if l-1 notin I then
89         L:=I join {@l-1@};
90         for t in [1..#psi] do
91             if L eq psi[t] then
94                 test[r][t]:=1;
95             end if;
96         end for;
97     end if;
98 end for;
99 for t in [1..#psi] do
100     test[t][t]:=test[t][t]+1;
101 end for;
102 mat:=test*mat;
103 Append(~mats,mat);
104 modul:=GModule(Sym(n),[mats[2],mats[1]]); // der F_2S_n-Spinmodul D(n)
105 return modul;
106 end function;

```

Bemerkung B.6.2. In den Zeilen 13-26 wird die Operation von $\sigma_1 := (1, 2)$ auf $D(n)$ berechnet. In den Zeilen 28-102 wird sukzessive die Operation der σ_i für $i = 2, \dots, n-1$ auf $D(n)$ berechnet.

Dabei ist die Matrix **mat** nach dem i -ten Schritt die darstellende Matrix von $\sigma_i \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 = (1, \dots, i)$. Am Ende erhält man so also die darstellende Matrix von $(1, \dots, n)$. Der Spinmodul $D(n)$ ist dann der in Zeile 104 konstruierte $\mathbb{F}_2 \mathfrak{S}_n$ -Modul **modul**.

Bemerkung B.6.3. Wir betrachten nun den Fall $n = 2m$ für ein $m \geq 2$ und bezeichnen den $F\mathfrak{S}_n$ -Spinmodul wieder mit $D(n)$. Die modularen Branching-Regeln aus Abschnitt 4.1 liefern dann

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D(n+1)) = \text{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D^{(m+1, m-1)}) \sim D(n) + D(n).$$

Wir konstruieren daher $\text{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D(n+1))$, indem wir die Operation von $(1, 2)$ und $(1, \dots, n)$ auf $D(n+1)$ mittels des obigen Verfahrens berechnen. Anschließend bestimmen wir die beiden zu $D(n)$ isomorphen Kompositionsfaktoren von $\text{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(D(n+1))$.

```

1  SpinmoduleEven:=function(m);
2    K:=FiniteField(2);
3    k:=2*m;
4    n:=2*m+1;
5    M:={1..n-2};
6    for a in M do
7      if IsEven(a) eq true then
8        M:=M diff {a};
9      end if;
10   end for;
11   S:=Subsets(M);
12   psi:=[{@a: a in b@}: b in S];
13   mats:=[];
14   l:=1;
15   mat:=ZeroMatrix(K,2^m,2^m);
16   for r in [1..#psi] do
17     I:=psi[r];
18     if l in I then
19       L:=I diff {@l@};
20     else L:=I join {@l@};
21     end if;
22     for t in [1..#psi] do
23       if L eq psi[t] then
24         mat[r][t]:=1;
25       end if;
26     end for;
27   end for;
28   Append(~mats,mat);
29   for l in [2..n-2] do
30     test:=ZeroMatrix(K,2^m,2^m);
31     if IsOdd(l) eq true then
32       for r in [1..#psi] do
33         I:=psi[r];
34         if l in I then
35           L:=I diff {@l@};
36         else L:=I join {@l@};
37         end if;
38         for t in [1..#psi] do
39           if L eq psi[t] then
40             test[r][t]:=1;
41           end if;

```

```

42     end for;
43     end for;
44     else
45     for r in [1..#psi] do
46         l:=psi[r];
47         if l-1 in I and l+1 in I then
48             for t in [1..#psi] do
49                 test[r][t]:=0;
50             end for;
51         elif l-1 in I and l+1 notin I then
52             L:=I join {l+1};
53             for t in [1..#psi] do
54                 if L eq psi[t] then
55                     test[r][t]:=1;
56                 end if;
57             end for;
58         elif l-1 notin I and l+1 in I then
59             L:=I join {l-1};
60             for t in [1..#psi] do
61                 if L eq psi[t] then
62                     test[r][t]:=1;
63                 end if;
64             end for;
65         else L1:=I join {l-1};
66             L2:=I join {l+1};
67             for t in [1..#psi] do
68                 if L1 eq psi[t] then
69                     test[r][t]:=1;
70                 end if;
71             end for;
72             for t in [1..#psi] do
73                 if L2 eq psi[t] then
74                     test[r][t]:=1;
75                 end if;
76             end for;
77         end if;
78     end for;
79     for t in [1..#psi] do
80         test[t][t]:=test[t][t]+1;
81     end for;
82     end if;
83     mat:=test*mat;
84     end for;
85     Append(~mats,mat);

86     Modul:=GModule(Sym(k),[mats[2],mats[1]]); // die Einschr\"ankung
                                                // von  $D(2m+1)$  auf  $S_{-}(2m)$ 
87     cons:=ConstituentsWithMultiplicities(Modul);
88     modul:=cons[1][1]; // der Spinmodul  $D(2m)$ 
89     return modul;
90 end function;

```

Literaturverzeichnis

- [1] J. L. Alperin: Local representation theory, *Cambridge University Press*, Cambridge 1986
- [2] F. W. Anderson, K. R. Fuller: Rings and categories of modules, Graduate Texts in Mathematics, 13, *Springer-Verlag*, New York 1992
- [3] D. J. Benson: Spin modules for symmetric groups, *J. London Math. Soc.* (2) **38** (1988), 250-262
- [4] D. J. Benson: persönliche Mitteilung, 2005
- [5] C. Bessenrodt: The isomorphism type of an abelian defect group of a block is determined by its modules, *J. London Math. Soc.* (2) **39** (1989), 61-66
- [6] C. Bessenrodt, A. Kleshchev: Irreducible tensor products over alternating groups, *J. Algebra* **228** (2000), 536-550
- [7] C. Bessenrodt, J. B. Olsson: On Residue Symbols and the Mullineux Conjecture, *J. Algebraic Combin.* **7** (1998), 227-251
- [8] J. Brundan, A. Kleshchev: Representations of the symmetric groups which are irreducible over subgroups, *J. Reine Angew. Math.* **530** (2001), 145-190
- [9] J. Brundan, A. Kleshchev: Representation theory of symmetric groups and their double covers, *Groups, combinatorics & geometry (Duan, 2001)*, 31-53, *World Sci. Publishing, River Edge, NJ*, 2003
- [10] J. Brundan, J. Kujawa: A new proof of the Mullineux conjecture, *J. Algebraic Combin.* **18** (2002), 13-39
- [11] J. F. Carlson, L. Townsley, L. Valeri-Elizondo, M. Zhang: Cohomology Rings of Finite Groups, *Algebras and Applications*, 3., *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht 2003
- [12] J. Chuang, K. M. Tan: Filtrations in Rouquier blocks of symmetric groups and Schur algebras, *Proc. London Math. Soc.* (3) **86** (2003), 685-706
- [13] C. W. Curtis, I. Reiner: Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Nachdruck, *Wiley Classics Library*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988
- [14] S. Donkin: On Schur Algebras and Related Algebras II *J. Algebra* **111** (1987), 354-364
- [15] S. Donkin: On Schur Algebras and Related Algebras IV *J. Algebra* **168** (1994), 400-429
- [16] S. Donkin: Symmetric and exterior powers, linear source modules and representations of Schur Superalgebras, *Proc. London Math. Soc.* (3) **83** (2001), 647-680
- [17] H. Ellers, J. Murray: Carter-Payne homomorphisms and branching rules for endomorphism rings of Specht modules, Preprint
- [18] K. Erdmann: Decomposition Numbers for Symmetric Groups and Composition Factors of Weyl Modules, *J. Algebra* **180** (1996), 316-320

- [19] K. Erdmann: Young modules for symmetric groups, *J. Aust. Math. Soc.* **71** (2001), 201-210
- [20] M. Fayers: On weight three blocks of symmetric groups in characteristic three, *Q. J. Math.* **53** (2002), 403-419
- [21] M. Fayers: Reducible Specht modules, *J. Algebra* **280** (2004), 500-504
- [22] M. Fayers: Irreducible Specht modules for Hecke algebras of type **A**, *Adv. Math.* **193** (2005), 438-452
- [23] W. Feit: The representation theory of finite groups, *North-Holland Mathematical Library*, 25, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York 1982
- [24] The GAP Group- *Groups, Algorithms and Programming*, Version 4.4.4, 2004 (<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap/>)
- [25] R. Gow, A. Kleshchev: Connections between the representations of the symmetric group and the symplectic group in characteristic 2, *J. Algebra* **221** (1999), 60-89
- [26] J. Grabmeier: Unzerlegbare Moduln mit trivialer Youngquelle und Darstellungstheorie der Schuralgebra, *Bayreuth. Math. Schr.* **20** (1985), 9-152
- [27] J. Graham, G. D. James: On a Conjecture of Gow and Kleshchev Concerning Tensor Products, *J. Algebra* **227** (2000), 767-782
- [28] J. A. Green: On the indecomposable representations of a finite group, *Math. Zeitschr.* **70** (1959), 430-445
- [29] D. J. Hemmer: The Ext^1 -quiver for completely splittable representations of the symmetric groups, *J. Group Theory* **4** (2001), 401-416
- [30] D. J. Hemmer: Fixed-point functors for symmetric groups and Schur Algebras, *J. Algebra* **280** (2004), 295-312
- [31] D. J. Hemmer: Irreducible Specht modules are signed Young modules, *J. Algebra* **305** (2006), 433-441
- [32] D. J. Hemmer, D. K. Nakano: Support varieties for modules over symmetric groups, *J. Algebra* **254** (2002), 422-440
- [33] D. J. Hemmer, D. K. Nakano: Specht filtrations for Hecke Algebras of type **A**, *J. London Math. Soc.* (2) **69** (2004), 623-638
- [34] A. Henke: On p -Kostka numbers and Young modules, *European J. Combin.* **26** (2005), 923-942
- [35] B. Huppert: Endliche Gruppen I, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 134, *Springer-Verlag*, Berlin-New York 1967
- [36] B. Huppert, N. Blackburn: Finite Groups II, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 243, *Springer-Verlag*, Berlin-New York 1982
- [37] G. D. James: The Representation Theory of the Symmetric Groups, *Springer-Verlag*, Berlin, Heidelberg, New York, 1978
- [38] G. D. James: On the minimal dimensions of irreducible representations of symmetric groups, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **94** (1983), 417-424
- [39] G. D. James: Trivial source modules for symmetric groups, *Arch. Math.* **41** (1983), 294-300

- [40] G. D. James, A. Kerber: The Representation Theory of the Symmetric Group, *Encycl. Math. Appl.* **16**, Addison-Wesley, Reading, 1981
- [41] G. D. James, A. Mathas: The irreducible Specht modules in characteristic 2, *Bull. London Math. Soc.* **31** (1999), 457-462
- [42] A. Kleshchev: Branching Rules for Modular Representations of Symmetric Groups I, *J. Algebra* **178** (1995), 493-511
- [43] A. Kleshchev: Branching Rules for Modular Representations of Symmetric Groups III: Some corollaries and a problem of Mullineux, *J. London Math. Soc.* (2) **54** (1996), 25-38
- [44] A. Kleshchev: Completely splittable representations of symmetric groups, *J. Algebra* **181** (1996), 584-592
- [45] A. Kleshchev: Branching rules for symmetric groups and applications, *Algebraic groups and their representations (Cambridge, 1997)*, 103-130
- [46] A. Kleshchev: Branching Rules for Modular Representations of Symmetric Groups IV, *J. Algebra* **201** (1998), 547-572
- [47] A. Kleshchev: Linear and Projective Representations of Symmetric Groups, *Cambridge University Press*, (2005)
- [48] R. Knörr: On the vertices of irreducible modules, *Ann. Math.* (2) **110** (1979), 487-499
- [49] B. Külshammer: Roots of simple modules, *Canad. Math. Bull.* (1) **49** (2006), 96-107
- [50] M. Künzer: A one-box-shift morphism between Specht modules, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **6** (2000), 90-94
- [51] MAGMA V2.11-14, The Computational Algebra Group, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney (<http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/>)
- [52] MAGMA V2.12-22, The Computational Algebra Group, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney (<http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/>)
- [53] H. Meyer: Konjugationsklassensummen in endlichen Gruppenringen, *Bayreuth. Math. Schr.*, **66** (2002)
- [54] J. Müller: Computational Representation Theory: Remarks on Condensation, IEM, Universität Duisburg-Essen, 2003, <http://www.math.rwth-aachen.de/~Juergen.Mueller/>
- [55] J. Müller, J. Rosenboom: Condensation of induced representations and an application: the 2-modular decomposition numbers of Co_2 , Computational methods for representations of groups and algebras (Essen, 1997), 309-321, *Progr. Math.*, **173**, Birkhäuser, Basel, 1999
- [56] J. Müller: The 2-modular decomposition matrices of the symmetric groups S_{15} , S_{16} and S_{17} , *Comm. Algebra* **28** (2000), 4997-5005
- [57] J. Müller, R. Zimmermann: Green vertices and sources of simple modules of the symmetric group, erscheint in *Arch. Math.*
- [58] G. M. Murphy, M. H. Peel: Vertices of Specht modules, *J. Algebra* **86** (1984), 85-97
- [59] H. Nagao, Y. Tsushima: Representations of Finite Groups, *Academic Press*, San Diego 1989
- [60] J. B. Olsson: McKay numbers and heights of charcters, *Math. Scand.* **38** (1976), 25-42
- [61] J. B. Olsson: Lower Defect Groups in Symmetric Groups, *J. Algebra* **104** (1986), 37-56

- [62] J. B. Olsson: On the p -Blocks of Symmetric and Alternating Groups and Their Covering Groups, *J. Algebra* **128** (1990), 188-213
- [63] L. Puig: On Joanna Scopes' Criterion of Equivalence for Blocks of Symmetric Groups, *Algebra Colloq.* **1** (1994), 25-55
- [64] A. J. E. Ryba: Fibonacci Representations of the Symmetric Groups, *J. Algebra* **170** (1994), 678-686
- [65] J. Scopes: Cartan Matrices and Morita Equivalence for Blocks of the Symmetric Groups, *J. Algebra* **142** (1991), 441-455
- [66] J.-P. Serre: Linear representations of finite groups, Graduate Texts in Mathematics, 42, *Springer-Verlag*, New York-Heidelberg 1977
- [67] J. Sheth: Branching rules for two row partitions and applications to the inductive systems for symmetric groups, *Comm. Algebra* (7) **27** (1999), 3303-3316
- [68] K. Uno: Simple modules in the Auslander-Reiten quiver of a finite group, *Proceedings Representation Theory of Finite and Algebraic Groups* (ed. N. Kawanaka, G. Michler, K. Uno), Osaka 2000, 103-112
- [69] M. Wildon: Two theorems on the vertices of Specht modules, *Arch. Math.* **81** (2003), 505-511
- [70] R. Zimmermann: Vertizes einfacher Moduln der Symmetrischen Gruppen, *Dissertation, Friedrich-Schiller-Universität Jena*, (2003)

Stichwortverzeichnis

- B -Paar, 25
- $[w : k]$ -Paar, 44
- i -Signatur
 - einer Partition, 41
 - eines Moduls, 41
- Abakus, 33
- Algebra
 - graduierte, 21
 - Gruppen-, 16
 - lokale, 13
 - verschränkte Gruppen-, 22
- Block, 13
 - alternierender, 37
 - Haupt-, 17
- Branching-Regel, 36
 - modulare, 41
- Brauerpaar, 25
- Defekt eines Blocks, 19
- Defektgruppe eines Blocks, 19
- direkte Summanden eines Moduls, 11
- direkte Summe von Moduln, 11
- Endomorphismenalgebra eines Moduls, 11
- Faktorensystem, 21
- Feit-Vermutung, 48
- Fittingkorrespondenz, 21
- Frobenius-Formel, 17
- Green-Korrespondent, 20
- Green-Korrespondenz, 20
- Greens Unzerlegbarkeitssatz, 20
- Haken, 31
 - q -Rand-, 31
 - Rand-, 31
- Hakendiagramm, 31
- Hakenformel, 36
- Hakenlänge, 31
- halbeinfaches induktives System, 52
- Idempotent, 13
 - Block-, 13
 - orthogonale \sim e, 13
 - primitives, 13
- Jacobson-Radikal eines Moduls, 12
- Knoten eines Young-Diagramms, 30
 - i -coguter, 42
 - i -conormaler, 42
 - i -guter, 42
 - i -normaler, 42
 - entfernbarer, 41
 - hinzufügbarer, 41
- Komplexität eines Moduls, 26
- Komposition, 29
- Kompositionsfaktoren, 12
- Kompositionslänge, 12
- Kompositionsreihe, 12
- Kondensation, 84
 - Fixpunkt-, 85
- Kondensationsfunktorkomplex, 84
- Kopf eines Moduls, 12
- Kostka-Zahl, 37
- Kranzprodukt, 27
 - Basisgruppe eines \sim s, 27
- kurze exakte Sequenz, 13
 - zerfallende, 13
- Mackey-Formel, 17
- Mackey-System, 56
- Matrixdarstellung, 15
 - ähnliche \sim en, 15
 - Grad einer, 15
- Modul
 - absolut irreduzibler, 13
 - absolut unzerlegbarer, 13
 - alternierender, 37
 - dualer, 17
 - einfacher, 12
 - eingeschränkter, 12
 - einreihiger, 12
 - halbeinfacher, 12
 - induzierter, 12
 - injektiver, 13
 - irreduzibler, 12
 - kondensierter, 84
 - konjugierter, 17
 - maximaler Unter-, 12
 - minimaler Unter-, 12
 - projektiver, 13

- reduzibler, 12
 - regulärer, 12
 - relativ projektiver, 18
 - selbstdualer, 17
 - Specht-, 36
 - Spin-, 73
 - trivialer, 17
 - uniserieller, 12
 - unkondensierter, 84
 - unzerlegbarer, 11
 - verallgemeinerter Permutations-, 55
 - verallgemeinerter Young-, 55
 - vollständig zerfallender, 52
 - Young-, 37
 - zerlegbarer, 11
- Nakayama-Vermutung, 38
- Ordnung
 - Dominanz-, 30
 - lexikographische, 30
- Partition, 29
 - S -, 38
 - q -Gewicht einer, 31
 - q -Inhalt einer, 31
 - q -Kern einer, 31
 - q -Restediagramm einer, 31
 - q -adische Entwicklung einer, 30
 - q -beschränkte, 29
 - q -reguläre, 29
 - q -singuläre, 29
 - konjugierte, 29
 - Mullineux-konjugierte, 37
- Polytabloid, 33
 - Standard-, 33
- Quelle, 19
 - Young-, 56
- Radikalideal, 25
- reduzierte i -Signatur
 - einer Partition, 42
 - eines Moduls, 42
- Regularisierung, 66
- relative Spurabbildung, 18
- Scopes-Äquivalenz, 44
- Sockel eines Moduls, 12
- Spaltenstabilisator, 32
- Summe von Moduln, 11
- Tabloid, 32
 - Standard-, 33
- Trägheitsgruppe eines Moduls, 21
- Unkondensationsfunktork, 84
- Varietät
 - affine, 25
 - irreduzible affine, 25
 - Krull-Dimension einer affinen , 25
 - Rang-, 26
- verschränktes Produkt, 22
- Vertex, 19
 - Young-, 56
- Young-Diagramm, 30
- Young-Tableau, 32
 - Standard-, 33
- Young-Untergruppe, 30
- Zeilenstabilisator, 32
- zentrale Gruppenerweiterung, 21
- Zerlegungszahl, 70
- zyklische verschobene Untergruppe, 26

Lebenslauf

Name	Susanne Danz
Geburtsdatum	17.04. 1982
Geburtsort	Schmalkalden
1988-1992	Grundschule Trusetal
1992-2000	Werratal-Gymnasium Schwallungen
19.06. 2000	Abitur
Oktober 2000-Januar 2005	Studium der Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
04.01. 2005	Abschluss mit dem Diplom
seit Februar 2005	wissenschaftliche Mitarbeiterin am Mathematischen Institut der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Jena, 10.12. 2006

Susanne Danz

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe.

Jena, 10.12. 2006

Susanne Danz